# ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 22 | Juni 1942 | Heft 3


## Inhalt:


Seite

Hauptaufsätze. G. Guderley: Rückkehrkanten in ebener kompressibler Potentialströmung . . . 121

C. Weber: Eingrenzung von Verschiebungen mit Hilfe der Minimalsätze . . . . . . . . . . . 126

C. Weber: Eingrenzung von Verschiebungen und Zerrungen mit Hilfe der Minimalsätze . . . . . 130

G. Heinrich: Über die Kompensation der Reibung durch zusätzliche Schwingbewegungen . . . . . 136

H. Bückner: Über eine Näherungslösung der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung . . . . . . . . . . . . . . . . . 143

H. Rosenhamer: Synthese ganzer rationaler Funktionen . . . . . . . . . . . . . . . . . 153

Kleine Mitteilungen. A. Ylinen: Die Differentialgleichung der Biegungsschwingungen eines axial belasteten geraden Stabes, dessen Material dem Hookeschen Gesetz nicht folgt . . . . . . 163

Bl. Dolaptschiew: Eine einfache geometrisch-mechanische Analogie . . . . . . . . . . . 164

E. Makai: Zur Berechnung der Eigenfrequenzen inhomogener Saiten . . . . . . . . . . . . 167

H. Meincke: Annäherung der logarithmischen Spirale durch Kreisbogen . . . . . . . . . . 168

H. Schminke: Eine Schieberanordnung für die Schlüsselgleichung $f_1(\varphi(\alpha)+\psi(\beta))+f_2(\gamma)=f_3(\alpha,\beta,\gamma)$, wobei nur das Endresultat abzulesen ist . . . . 169

E. Mohr: Bemerkung zum Buffonschen Nadelproblem 170

H. Gebelein: Bemerkung über ein von W. Höffding vorgeschlagenes, maßstabsinvariantes Korrelationsmaß . . . . . . . . . . . . . . . . . 171

Buchbesprechungen. Fischer: Die unabzählbare Menge, 2. Teil von „Grundlagen der Philosophie und der Mathematik". — Argentieri: Ottica Idustriale. — Raethjen: Einführung in die Physik der Atmosphäre, Bd. 1, Statik und Thermodynamik. — Riezler: Einführung in die Kernphysik. — Riezler: Tabellen und Tafeln zur Kernphysik. — Dörrie: Vektoren. — Sirk: Mathematik für Naturwissenschaftler und Chemiker. — Witting: Differentialrechnung. — Kamke: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen — Neiß: Determinanten und Matrizen. — Jordan: Handbuch der Vermessungskunde, III. Bd., zweiter Halbband, Sphäroidische Berechnungen, konforme Abbildung des Erdellipsoids und Aufgaben der Erdmessung. — Weiter eingegangene Bücher . . . . . . . . . . . . . . . . . 173

Nachrichten . . . . . . . . . . . . . . . . 176


# HAUPTAUFSÄTZE

## Rückkehrkanten in ebener kompressibler Potentialströmung.


Von *G. Guderley* in Braunschweig.

Mitteilung aus dem Institut für Gasdynamik der Luftfahrtforschungsanstalt Hermann Göring.



*Wie bekannt ergeben sich in analytisch gefundenen Überschallströmungen häufig Rückkehrkanten. Es wird an einigen Beispielen mit Hilfe der Prandtl-Busemannschen Charakteristikenmethode gezeigt, was bei solchen Strömungen physikalisch zu erwarten ist. Je nach dem Verhalten des Druckes an der Rückkehrkante ist diese entweder das bekannte Kriterium für das Auftreten von Verdichtungsstößen oder ein Anzeichen, daß sich der Strömungsverlauf oberhalb ganz oder teilweise abändert, ohne daß dabei Verdichtungsstöße auftreten müßten.*


In letzter Zeit haben die Arbeiten von Ringleb[1]) das Augenmerk von neuem auf die schon früher von Tollmien[2]) gefundene Erscheinung gelenkt, daß bei der analytischen Behandlung der Potentialströmung eines kompressiblen Mediums Rückkehrkanten auftreten können. Diese Ringlebschen Arbeiten ergänzend hat Tollmien[3]) den Beweis geführt, daß in jedem Falle die Strömung vor der Rückkehrkante „zusammenbricht". Mit dieser Feststellung ist die Frage nach der physikalischen Bedeutung der Rückkehrkanten natürlich noch nicht beantwortet[4]). Einige Überlegungen, die in dieser Hinsicht nützlich sein können, bringt die vorliegende Arbeit.

Das wesentliche Hilfsmittel hierbei ist das Prandtl-Busemannsche Charakteristikenverfahren[5]). Es ist besonders anschaulich, weil bei ihm die Machschen Wellen nicht nur als Charakteristiken, d. h. als Linien, längs deren sich eine Störung möglicherweise fortpflanzen könnte, sondern unmittelbar als Träger einer wohlbestimmten Zustandsänderung

[1]) F. Ringleb: Exakte Lösungen der Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung. Z. angew. Math. Mech. Bd. 20 (1940), S. 185 bis 198. — F. Ringleb: Über die Differentialgleichung einer adiabatischen Gasströmung und den Strömungsstoß. Deutsche Mathematik, Bd. 5 (1940), S. 377 bis 384.

[2]) W. Tollmien: Zum Übergang von Unterschall- in Überschallströmungen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 17 (1937), S. 117 bis 136.

[3]) W. Tollmien: Grenzlinien adiabatischer Potentialströmungen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941), S. 140 bis 152.

[4]) Hierauf weist schon Tollmien hin, a. a. O. (Fußnote 3), S. 152.

[5]) A. Busemann: Beitrag Gasdynamik im Handbuch der Experimentalphysik (Wien-Harms), Leipzig 1931, Bd. 4, 1. Teil § 26.

aufgefaßt werden[6]). Zur Orientierung in unseren Bildern diene die Bemerkung, daß Verdichtungswellen durch ausgezogene, Verdünnungswellen durch gestrichelte Linien gekennzeichnet sind. Der „Sprung", d. h. die Winkeländerung, die der Geschwindigkeitsvektor beim Überschreiten einer Machschen Welle erfährt, ist durchweg 2°.

## 1. Rückkehrkanten mit Expansion.

Nach ihren physikalischen Eigenschaften sind zwei Typen von Rückkehrkanten zu unterscheiden, nämlich Rückkehrkanten, bei denen eine Kompression und Rückkehrkanten, bei denen eine Expansion stattfindet. Wir wenden uns zunächst zu einer Strömung, in der eine Rückkehrkante mit Expansion auftritt (Bild 1), sie entspricht etwa dem Beispiel, das in Bild 13 der ersten Tollmienschen Arbeit[2]) dargestellt ist. Die Anströmung geschieht von rechts. Das analytisch berechnete Strömungsfeld erstreckt sich bis zur Linie $AB$. Wie bekannt, ist eine Rückkehrkante die Hüllkurve Machscher Wellen. Bei Rückkehrkanten mit Expansion handelt es sich, wie unser Beispiel zeigt, um Verdünnungswellen, deren jede auf der vorhergehenden ihren Anfang nimmt. Eine solche Strömung ist durch keine am Rande vorzunehmenden Maßnahmen realisierbar; die stärkste Konzentration von Verdünnungswellen, die man einer Strömung vom Rande her aufzwingen kann, ergibt sich nämlich, wenn man dort eine Ecke anbringt. Man erhält dann einen Fächer von Verdünnungswellen, die in einem endlichen Abstand vom Rande jedenfalls auch einen endlichen Abstand voneinander haben und deshalb im Innern der Strömung nicht mehr auseinander hervorgehen können. Die Strömung mit Rückkehrkanten besitzt also eine stärkere Konzentration von Verdünnungswellen, als sie durch irgend eine Randbedingung zu erreichen wäre. Erst durch Maßnahmen innerhalb des Strömungsfeldes, z. B. indem man längs der Rückkehrkante Ablenkschaufeln anbringt, ist das analytisch gefundene Strömungsbild zu verwirklichen. In Bild 1 ist unterhalb der Linie $AB$ das hierzu notwendige System von Ablenkschaufeln nebst dem zugehörigen Strömungsverlauf angegeben. Da das Strömungsbild mit endlichem Sprung aufgezeichnet worden ist, ergibt sich ein System von endlicher Schaufelzahl. Geht der Sprung gegen Null, so geht die Schaufelzahl nach Unendlich. Um zu zeigen, daß sich die Strömung mit Sicherheit fortführen läßt, sind die Wände so geformt, daß schließlich ein Parallelstrahl entsteht. Die Wirkung der Umlenkschaufeln besteht darin, daß sie auf das Gebiet oberhalb der Rückkehrkante Einfluß nehmen und dort die von der analytischen Lösung geforderte Konzentration von Verdünnungswellen erzeugen.

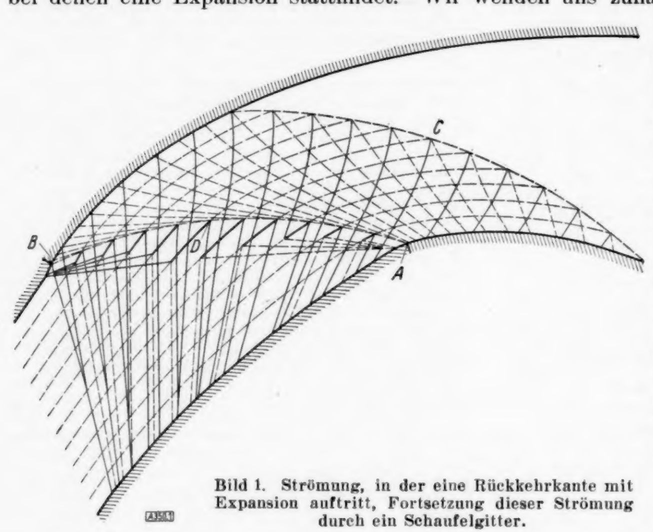



Bild 1. Strömung, in der eine Rückkehrkante mit Expansion auftritt, Fortsetzung dieser Strömung durch ein Schaufelgitter.

Aufschlußreicher als diese Überlegungen ist natürlich die Lösung der bereits von Tollmien formulierten Aufgabe, „die tatsächliche Strömung innerhalb der Berandung herzustellen, die bis zum Ort der Grenzlinie mit dem Rand der Grenzlinienströmung übereinstimmt". Sie läßt sich mit Hilfe der Charakteristikenmethode angeben, wenn der Abstand der berandenden Stromlinien einen gewissen, im allgemeinen nicht verschwindenden Betrag nicht überschreitet. Es sei das Strömungsfeld vom Unterschall her bis zur kritischen Geschwindigkeit und außerdem die gesamte Berandung wie bei der analytischen Lösung gegeben. Als Berandung ist das frühere linke Ufer in Bild 1 sowie die Stromlinie $CD$ gewählt (Bild 2).

Wendet man nun die Charakteristikenmethode an, so zeigt sich, daß die Strömung überhaupt nur bis zu der vom Endpunkt $A$ der Berandung ausgehenden, stromabwärts verlaufen-

[6]) Genauer gesagt: Wegen der besonderen Eigenschaften der ebenen Potentialströmung läßt sich den Machschen Wellen eine solche Bedeutung erteilen, daß beim Überschreiten einer Welle eine Zustandsänderung eintritt, die nur von dem örtlichen Zustand und dem für Gebiete des Strömungsfeldes einheitlich zu wählenden „Sprung", nicht aber von der Länge des durchlaufenen Linienelements abhängt.

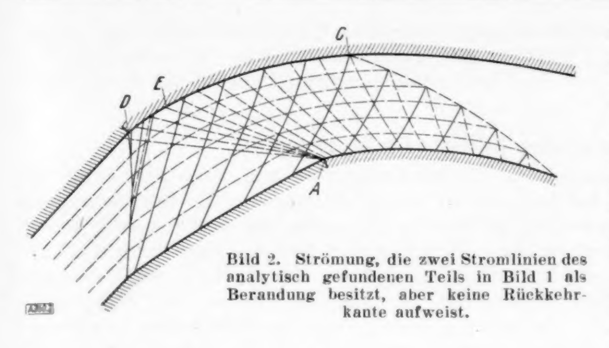



Bild 2. Strömung, die zwei Stromlinien des analytisch gefundenen Teils in Bild 1 als Berandung besitzt, aber keine Rückkehrkante aufweist.

den Machschen Welle $AE$ bestimmt ist. Bis dahin stimmt die analytisch berechnete und die mit der Charakteristikenmethode gefundene Lösung überein. Über das weitere, bisher noch unbestimmte Gebiet verfügt die analytische Lösung durch die Festsetzung, daß dort die Linien gleichen Zustands, wie bisher, Kreise sein sollen, im allgemeinen also durch analytische Fortsetzung. In Wirklichkeit ist dieses Gebiet jedoch durch die Randbedingungen bestimmt, die man unterhalb von $A$ vorschreibt und mit deren Hilfe sich, wie oben gezeigt wurde, die analytische Fortsetzung nicht erreichen läßt. In Bild 2 ist in $A$ zunächst eine Ecke angebracht und der weitere Verlauf der Ufer so geformt worden, daß sich schließlich ein Parallelstrahl ergibt.

Das Charakteristikenverfahren ergibt natürlich auch für jede glatte Fortsetzung der Kontur eine mögliche Fortsetzung der Strömung; die Ecke ist angebracht worden, um einen möglichst großen Abstand der berandenden Stromlinien zu erhalten (vgl. den folgenden Absatz).

Diese Konstruktion versagt, wenn die beiden Ränder so weit voneinander entfernt sind, daß sich dabei Unterschallgebiete ergeben. Wie in diesem Fall die Strömung aussieht, läßt sich nicht ohne weiteres angeben, insbesondere ist zunächst nicht entschieden, ob sich die Änderung der analytisch gefundenen Lösung auch auf die Unterschallzuströmung erstreckt. Es ist durchaus denkbar, daß sich nur innerhalb der Überschallströmung isolierte Unterschallgebiete bilden, während die Unterschallzuströmung erhalten bleibt. Dies ist sicherlich nicht mehr möglich, wenn die Machsche Welle, die den durch die Randbedingungen bestimmten Bereich begrenzt (in Bild 2 die Linie $AE$) nicht auf der Kontur, sondern schon vorher auf der Linie der kritischen Geschwindigkeit endet. In diesem Fall nimmt die Fortsetzung, die man der Berandung unterhalb von $A$ erteilt, Einfluß auf die gesamte Unterschallströmung, die dadurch in ihrem ganzen Verlauf geändert wird. Auf jeden Fall ist das Versagen des Charakteristikenverfahrens nur eine Grenze der Berechnungsmethode, die keinesfalls bedeutet, daß bei ihrem Überschreiten physikalische Überraschungen zu erwarten wären.

## 2. Rückkehrkanten mit Kompression.

Als Beispiel für Rückkehrkanten mit Kompression benutzen wir die zu Bild 1 gehörige „Rückkehrströmung" (Bild 3). Sie entspricht dem Bild 15 der ersten Tollmienschen Arbeit. Die Strömung möge aus dem Unendlichen (von oben her) kommen und auf die Rückkehrkante zu führen. Die Rückkehrkante entsteht hier dadurch, daß Verdichtungswellen zusammenlaufen. Wollte man die Strömung bis zur Rückkehrkante verwirklichen, so müßte man ebenfalls Leitschaufeln benutzen, die hier die Aufgabe hätten, das Zusammenlaufen der Verdichtungswellen zu verhindern. Dieses Leitschaufelsystem und die sich darin einstellende Strömung ist das gleiche wie in Bild 1; in Bild 3 sind die Anfänge angedeutet. Wenn diese Schaufeln fehlen, laufen die Verdichtungswellen zu einem Verdichtungsstoß zusammen, den man, solange er schwach ist, ohne grundsätzlichen Fehler als Verdichtungswelle mit größerem

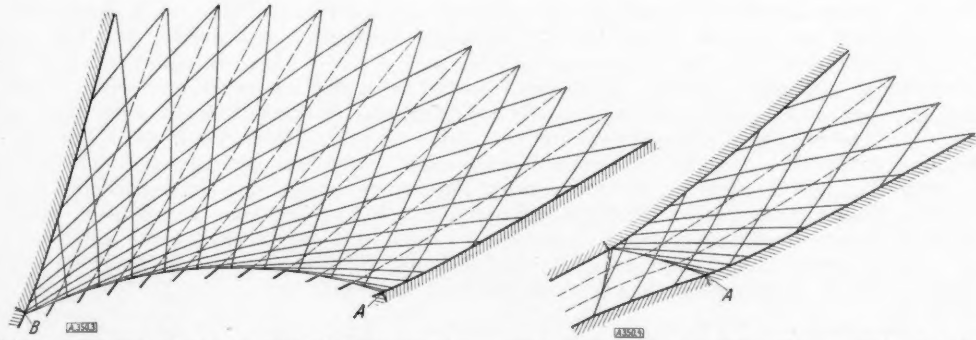



Bild 3. Strömung, bei der eine Rückkehrkante mit Kompression auftritt (Rückkehrströmung zu Bild 1).

Bild 4. Strömung mit zwei Stromlinien des Bildes 3 als Berandung. An Stelle der Rückkehrkante mit Kompression ist ein Verdichtungsstoß getreten.

Sprung behandeln kann[7]). Dies ist in Bild 4 geschehen; der Verdichtungsstoß liegt etwas oberhalb der früheren Rückkehrkante. Auch hier gibt das Auftreten von Unterschallgebieten eine Grenze für die Durchführbarkeit des Verfahrens und beschränkt damit die Entfernung, die man den beiden Ufern geben darf.

## 3. Anwendung auf das Ringlebsche Beispiel.

Bei den Tollmienschen Beispielen wird die Rückkehrkante von jeder Stromlinie erreicht[8]). Einen anderen Strömungstyp, bei dem nur ein Teil der Stromlinien die Rückkehrkante trifft, zeigt das von Ringleb angegebene Beispiel, das im folgenden untersucht werden soll[9]).

Die Rückkehrkante weist hier Spitzen auf. Zwischen den beiden Ästen der Rückkehrkante, die von einer solchen Spitze ausgehen, liegt ein Gebiet, das dreifach mit Zustandsgrößen überdeckt ist. Man kann es sich anschaulich vorstellen, indem man die Strömungsebene mit drei Blättern überdeckt denkt, deren jedes einfach mit Zustandsgrößen belegt ist. Längs der Rückkehrkanten sind diese Blätter zusammengeheftet. Es ist also so, als ob die Strömungsebene zwischen den Rückkehrkanten eine Falte aufweist. Diese Faltenbildung (Bild 5a) ist für diese Strömungen mit Rückkehrkanten typisch; betrachten wir nun das Ringlebsche Beispiel im einzelnen.

Die Strömung möge von rechts unten aus dem Unendlichen kommen und nach rechts oben ins Unendliche führen. Zunächst soll die untere Hälfte der Strömungsebene ins Auge gefaßt werden (Bild 6). Von den beiden Ästen der Rückkehrkante ist nur derjenige eingezeichnet, den die aus dem Unendlichen kommenden Stromlinien zuerst treffen (Kurve $AB$, die Spitze liegt in $A$). Diese Rückkehrkante $AB$ ist eine Rückkehrkante mit Expansion. Zwischen zwei nicht allzuweit voneinander entfernten Stromlinien läßt sich, wie früher, eine Strömung angeben, die als Ränder diese ursprünglichen Stromlinien besitzt und keine Rückkehrkante mehr aufweist. Dies ist in Bild 7 geschehen. Als Berandung sind dabei die strichpunktierten Stromlinien $CD$ und $EF$ in Bild 6 gewählt worden. Durch die Berandung zusammen mit den Anfangsbedingungen ist die Strömung nur bis zur Machschen Welle $DG$ bestimmt. Der weitere Verlauf hängt von der Fortsetzung ab, die man dem rechten Ufer über $D$ hinaus erteilt. Sie wurde so gewählt, daß die Symmetrielinie $HI$ der ursprünglichen Strömung überall senkrecht durchströmt wird. Den weiteren Strömungsverlauf könnte man durch Spiegelung an der Linie $IH$ erhalten. Der Abstand der Stromlinien, für den sich mögliche Strömungen mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens angeben lassen, ist auch hier beschränkt. Ob sich beim Überschreiten dieses Abstands sofort die Unterschallströmung ändert, kann nicht entschieden werden. Sicher tritt dies ein, wenn an der äußeren Berandung nirgends mehr Überschall auftritt. In diesem Fall ist die analytisch gefundene Strömung nur dann zu realisieren, wenn man das innere Ufer so weit in die Strömung hineinlegt, daß die Rückkehrkante ausgeschlossen bleibt. Ganz anders liegen die Verhältnisse bei einer Rückkehrkante mit Kompression, wie sie sich in der oberen Hälfte der Strömungsebene ergibt (Bild 8). Hier kann man immer, unabhängig von der Lage der äußeren Berandung, den Verdichtungsstoß einzeichnen, der durch das Zusammenlaufen der Verdichtungswellen entsteht. Ist dieser genügend schwach, so entspricht die stromabwärts davon befindliche Strömung wiederum der analytischen Lösung; die Falte in Bild 5a wird einfach durch einen Sprung ersetzt (Bild 5b). Es ist hiernach zu vermuten, daß sich auch Beispiele finden lassen, wo der Verdichtungsstoß ins Unterschallgebiet führt.

Einen Mangel besitzt dieser Lösungstyp allerdings noch, an der Stelle, wo der Verdichtungsstoß auf die Kontur trifft, weist diese eine Ecke auf. Das schränkt natürlich die Bedeutung solcher Strömungen ein.

Bei diesen letzten Überlegungen ist angenommen worden, daß die Geschwindigkeitsverteilung, wie sie auf der Mittellinie $HI$ herrscht, physikalisch realisierbar ist. Von der Zuströmseite stehen dem Schwierigkeiten im Weg, weil dort die innere Stromlinie so weit in die Strömung hineingelegt werden muß, daß die Rückkehrkante ausgeschlossen wird. Damit schneidet man jedoch wegen der Symmetrie der Strömung in bezug auf $HI$ auch auf der Seite der Abströmung die Rückkehrkante und damit den Verdichtungsstoß aus. Um eine Strömung zu finden, die diese Schwierigkeit vermeidet, müßte man sich durch Kombination mehrerer der von Tschapligin stammenden Partikularlösungen der Differentialgleichung des Hodographen eine unsymmetrische Strömung mit Rückkehrkanten verschaffen. Dort läßt sich dann wahrscheinlich eine Berandung so wählen, daß die Rückkehrkante mit Expansion ausgeschlossen bleibt, während eine Rückkehrkante mit Kompression, die dann als Verdichtungsstoß zu deuten wäre, dem Strömungsbereich angehört.

---

[7]) Busemann a. a. O. § 27.

[8]) Auf einen Irrtum, der mir an dieser Stelle unterlaufen war, machte mich Herr Tollmien freundlicherweise aufmerksam.

[9]) Z. angew. Math. Mech. a. a. O. Bild 4 oder Deutsche Mathematik a. a. O.

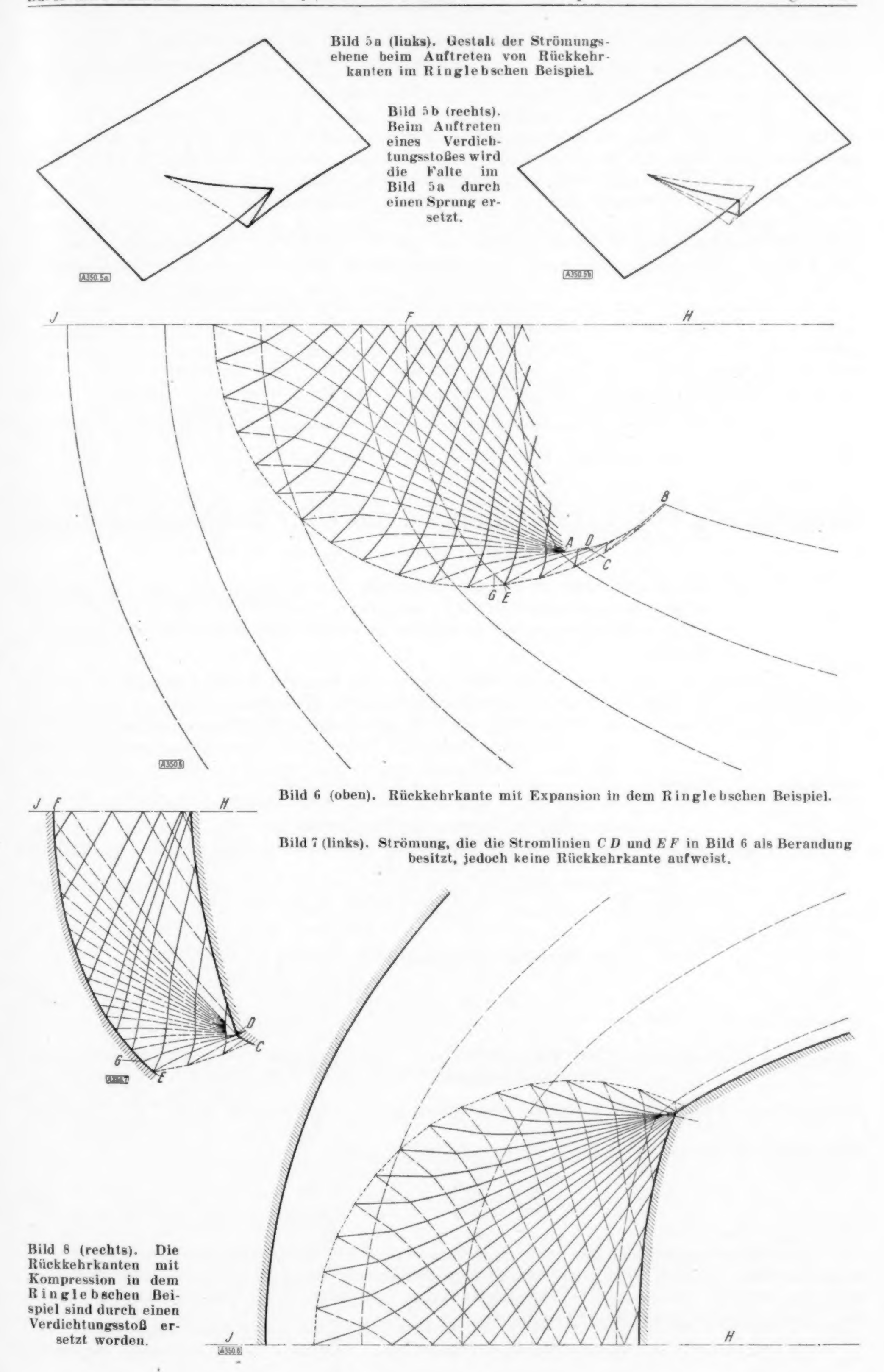



Bild 5a (links). Gestalt der Strömungsebene beim Auftreten von Rückkehrkanten im Ringlebschen Beispiel.

Bild 5b (rechts). Beim Auftreten eines Verdichtungsstoßes wird die Falte im Bild 5a durch einen Sprung ersetzt.

Bild 6 (oben). Rückkehrkante mit Expansion in dem Ringlebschen Beispiel.

Bild 7 (links). Strömung, die die Stromlinien $CD$ und $EF$ in Bild 6 als Berandung besitzt, jedoch keine Rückkehrkante aufweist.

Bild 8 (rechts). Die Rückkehrkanten mit Kompression in dem Ringlebschen Beispiel sind durch einen Verdichtungsstoß ersetzt worden.

## Zusammenfassung.

Hinsichtlich ihrer physikalischen Bedeutung bestehen zwischen Rückkehrkanten mit Expansion und solchen mit Kompression wesentliche Unterschiede [10]).

Strömungen, in denen Rückkehrkanten mit Expansion auftreten, sind durch die Gestaltung ihrer Ufer allein in ihrem gesamten Verlaufe nicht zu verwirklichen. Erst durch Maßnahmen innerhalb des Strömungsfeldes — man müßte unterhalb der Rückkehrkante, aber jedenfalls nicht in dem analytisch gefundenen Bereich Leitschaufeln anbringen — kann die analytische Lösung erzwungen werden. Wo diese Maßnahmen fehlen, tritt eine Abänderung des Strömungsverlaufs schon oberhalb der Rückkehrkante ein. Wenn sich diese Änderung auf das Überschallgebiet beschränkt, läßt sie sich mit Hilfe der Charakteristikenmethode angeben. Die Strömungen, die man dabei erhält, weisen keinerlei physikalische Besonderheiten auf. Die meisten Vermutungen über die Bedeutung von Rückkehrkanten, die das bisherige Schrifttum enthält, sind danach für Rückkehrkanten mit Expansion nicht zutreffend. Auch in den Fällen, wo die Änderung der analytisch berechneten Strömung nicht mehr angebbar ist, ist das Auftreten physikalischer Besonderheiten unwahrscheinlich. Rückkehrkanten mit Kompression sind ein Zeichen für das Auftreten von Verdichtungsstößen. Bei geeigneten Beispielen läßt sich der Verdichtungsstoß näherungsweise sofort angeben. 350

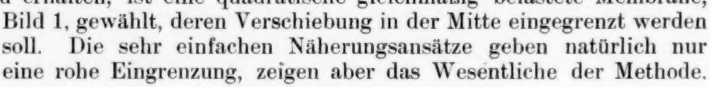
[10]) Die bisherigen Arbeiten machen wegen ihrer vorwiegend mathematischen Zielsetzung diesen physikalischen Unterschied nicht.

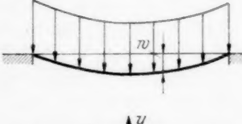
# Eingrenzung von Verschiebungen mit Hilfe der Minimalsätze.

Von *Constantin Weber* in Dresden.

*Zur Einführung in den nachfolgenden Aufsatz wird hier zunächst die dort allgemein entwickelte Methode an einem einfachen Beispiel (Eingrenzung der Verschiebung einer belasteten quadratischen Membrane) auseinandergesetzt.*

Zu meinem Aufsatze, der diesem folgt, möchte ich hier ein Beispiel bringen. Um ein recht einfaches Problem zu erhalten, ist eine quadratische gleichmäßig belastete Membrane, Bild 1, gewählt, deren Verschiebung in der Mitte eingegrenzt werden soll. Die sehr einfachen Näherungsansätze geben natürlich nur eine rohe Eingrenzung, zeigen aber das Wesentliche der Methode.





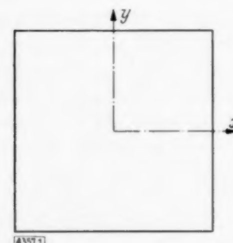




Bild 1. Belastete Membrane.

## I. Die Minimalsätze.

Die elastischen Eigenschaften der Membrane seien derart, daß bei einer Verschiebung $w(x, y)$ die Zerrungsenergie je Flächeneinheit gleich $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]$ wird. Bei festgehaltenem Rande wird

$$w_{\text{Rand}}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Das Minimum der potentiellen Energie gibt:

$$J(w,p)=\int_{(f)}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]-w\,p\right\}\mathrm{d}f=\text{Min} \quad . \quad . \quad (2).$$

Setzen wir verschiedene Verschiebungen $w(x, y)$ ein, die den Randbedingungen genügen, so machen die wirklichen Verschiebungen $w_w$ den Ausdruck $J(w,p)$ zum Minimum, das gleich $J_w=-\frac{1}{2}\int_{(f)} w_w\,p\,\mathrm{d}f$ wird. Mit Hilfe der Variationsrechnung erhält man die Eulersche Gleichung

$$\frac{\partial^2 w_w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_w}{\partial y^2}+p=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

mit $w_{w\,\text{Rand}}=0$.

Das Variationsproblem läßt sich nach Friedrichs[1]) in ein zweites Variationsproblem transformieren; hierbei wird der Minimalwert des ersten Variationsproblems zum Maximalwert des zweiten (dieses zweite Variationsproblem entspricht nach Umkehr der Vorzeichen dem Castiglianoschen Minimalprobleme).

[1]) K. Friedrichs: „Ein Verfahren der Variationsrechnung . . .". Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1929.

Für die Membrane lautet das zweite Variationsproblem wie folgt: Zwei Funktionen $\sigma(x, y)$ und $\tau(x, y)$ mögen die „Gleichgewichts"-Gleichung

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}+\frac{\partial \tau}{\partial y}+p=0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

befriedigen. Wir setzen:

$$K=\int_{(f)} \frac{1}{2}(\sigma^2+\tau^2)\,\mathrm{d}f=\text{Min} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5).$$

Bei Wahl aller möglichen Funktionen $\sigma$, $\tau$, die der Gl. (4) genügen, gibt die Lösung des Variationsproblemes (5) die wahren Funktionen $\sigma_w$, $\tau_w$; diese werden $\sigma_w=\frac{\partial w_w}{\partial x}$, $\tau_w=\frac{\partial w_w}{\partial y}$ und der Minimalwert des Variationsproblemes ist

$$K_w=\int_{(f)} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w_w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w_w}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}f=\frac{1}{2}\int_{(f)} p\, w_w\,\mathrm{d}f \quad \ldots \ldots \ldots (6).$$

## II. Eingrenzung des Integralwertes der Variationsprobleme.

Soll $-J_w=K_w=\frac{1}{2}\int_{(f)} p\, w_w\,\mathrm{d}f$ eingegrenzt werden, so nehmen wir erst für $w$ einen Näherungsansatz mit $w_{\text{Rand}}=0$, dann für $\sigma$ und $\tau$ einen Näherungsansatz, der die „Gleichgewichtsbedingung" $\frac{\partial \sigma}{\partial x}+\frac{\partial \tau}{\partial y}+p=0$ erfüllt. Mit Hilfe des ersten Ansatzes berechnen wir

$$J \geqq J_w \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7),$$

mit Hilfe des zweiten Ansatzes

$$K \geqq K_w \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

und hieraus

$$-J \leqq \frac{1}{2}\int_{(f)} p\, w_w\,\mathrm{d}f \leqq K \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9).$$

Für die quadratische Membrane, die durch $x \pm 1$, $y \pm 1$ begrenzt und durch $p=1$ belastet ist, nehmen wir z. B.

$$w=c(1-x^2)(1-y^2),$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-2\,c\,x(1-y^2), \qquad \frac{\partial w}{\partial y}=-2\,c\,y(1-x^2)$$

und finden

$$J=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left\{\frac{1}{2}c^2[4x^2(1-y^2)^2+4y^2(1-x^2)^2]-c(1-x^2)(1-y^2)\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{128}{45}c^2-\frac{16}{9}c.$$

Für das optimale $c=\frac{5}{16}$ erhalten wir das kleinste $J=-\frac{5}{18}$.

Als Ansatz für $\sigma$ und $\tau$ nehmen wir $\sigma=-\frac{x}{2}$, $\tau=-\frac{y}{2}$, womit die Gleichgewichtsbedingung (4) erfüllt ist.

Man erhält

$$K=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{1}{2}(\sigma^2+\tau^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{3}.$$

Hieraus folgt die Eingrenzung

$$\frac{5}{18} \leqq \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} w_w\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqq \frac{6}{18}.$$

Diese Eingrenzung stellt nichts Neues dar und ist nur zum Verständnis des Folgenden vorangestellt.

## III. Eingrenzung der Verschiebung der Membranenmitte.

Die gegebene Belastung sei $p_1$, die wirkliche Verschiebung $w_{1w}$; eingegrenzt werden soll die Verschiebung der Membranenmitte. Wir nehmen eine zweite Belastung $p_2$ mit der Verschiebung $w_{2w}$, wobei die Gesamtlast $\int p_2\,\mathrm{d}f = 1$ sei. Wir zeigen erst, wie der Ausdruck $\int p_2 w_{1w}\,\mathrm{d}f = \int p_1 w_{2w}\,\mathrm{d}f$ eingegrenzt wird. An Stelle der Belastung $p_2$ nehmen wir etwas allgemeiner die Belastung $P p_2$. Für die Belastung $p_1$ wählen wir Näherungsansätze $w_1$ bzw. $\sigma_1, \tau_1$, für die Belastung $P p_2$ die Näherungsansätze $P w_2$, bzw. $P\sigma_2$, $P\tau_2$.

Wir stellen die Ungleichung (7) erst für die Belastung $p_1 + P p_2$, dann für $p_1$ getrennt und für $P p_2$ getrennt auf, ebenso die Ungleichung (8):

$$J(w_1 + P w_2, p_1 + P p_2) \geqq -\frac{1}{2}\int p_1 w_{1w}\,\mathrm{d}f - P\int p_2 w_{1w}\,\mathrm{d}f - \frac{1}{2}P^2\int p_2 w_{2w}\,\mathrm{d}f \quad . \quad (10),$$

$$J(w_1, p_1) \geqq -\frac{1}{2}\int p_1 w_{1w}\,\mathrm{d}f \quad \ldots \ldots \quad (11),$$

$$J(P w_2, P p_2) \geqq -\frac{1}{2}P^2\int p_2 w_{2w}\,\mathrm{d}f \quad . \quad (12),$$

$$K(\sigma_1 + P\sigma_2, \tau_1 + P\tau_2) \geqq \frac{1}{2}\int p_1 w_{1w}\,\mathrm{d}f + P\int p_2 w_{1w}\,\mathrm{d}f + \frac{1}{2}P^2\int p_2 w_{2w}\,\mathrm{d}f \quad . \quad (13),$$

$$K(\sigma_1, \tau_1) \geqq \frac{1}{2}\int p_1 w_{1w}\,\mathrm{d}f \quad \ldots \ldots \quad (14),$$

$$K(P\sigma_2, P\tau_2) \geqq +\frac{1}{2}P^2\int p_2 w_{2w}\,\mathrm{d}f \quad . \quad (15).$$

Durch Addition der Ungleichungen (10), (14), (15) bzw. (11), (12), (13) erhält man

$$-P\int p_2 w_{1w}\,\mathrm{d}f \leqq J(w_1 + P w_2, p_1 + P p_2) + K(\sigma_1, \tau_1) + K(P\sigma_2, P\tau_2) \quad \ldots \quad (16),$$

$$P\int p_2 w_{1w}\,\mathrm{d}f \leqq K(\sigma_1 + P\sigma_2, \tau_1 + P\tau_2) + J(w_1, p_1) + J(P w_2, P p_2) \quad \ldots \quad (17).$$

Durch jede der Ungleichung (16) und (17) ist $\int p_2 w_{1w}\,\mathrm{d}f$ nach zwei Seiten eingegrenzt, da $P$ sowohl positiv als auch negativ gewählt werden kann.

Wählt man $p_2$ so, daß $p_2$ nur auf einer kleinen Fläche um den Mittelpunkt der Membrane von Null verschieden ist, so geht der eingegrenzte Wert über in

$$\int_{(f)} p_2 w_{1w}\,\mathrm{d}f \rightarrow w_{1wm}\int_{(f)} p_2\,\mathrm{d}f = w_{1wm}.$$

$w_{1wm}$ ist die wirkliche Verschiebung (Index $w$) durch die Belastung $p_1$ (Index 1) im Membranenmitte (Index $m$).

Bei ungeeigneten Ansätzen von $w_2$ und $\sigma_2, \tau_2$ erhält man als Grenzen $-\infty$ und $+\infty$. Um diesen Fall auszuschließen müssen die Näherungsansätze für $w_2$ bzw. $\sigma_2, \tau_2$ im Angriffspunkt der Kraft 1, zu der die Belastung $p_2$ zusammenschrumpft, die richtigen Singularitäten aufweisen.

Für unser Beispiel mit $p_1 = 1$ machen wir folgende Ansätze
für die Belastung $p_1$:

$$w_1 = \frac{5}{16}(1 - x^2)(1 - y^2),$$

$$\sigma_1 = -\frac{x}{2}, \qquad \tau_1 = -\frac{y}{2};$$

für die Kraft $P$, also für die Belastung $P p_2$:

$$P w_2 = -\frac{P}{4\pi}[\ln r^2 - \ln(1 + x^2) - \ln(1 + y^2) + \ln 2]$$

$$P\sigma_2 = -\frac{P}{2\pi}\frac{x}{r^2}, \qquad P\tau_2 = -\frac{P}{2\pi}\frac{y}{r^2}.$$

Die Ansätze für die Kraft $P$ haben im Punkte $x=y=0$ die gleichen Singularitäten wie bei einer Kreismembrane mit der Kraft $P$.

Bei der Auswertung der Integrale sind die Anteile, die den Wert $\infty$ geben, in Polarkoordinaten mit der unteren Grenze $r=\varepsilon$ ermittelt.

Wir stellen uns hierzu vor, daß die Kraft $P$ nicht in einem Punkte, sondern gleichmäßig verteilt auf einer Kreislinie vom Halbmesser $\varepsilon$ angreift. Im Ansatze für $P w_2$ ist dann für $r>\varepsilon$ $\ln r^2$, für $r<\varepsilon$ $\ln \varepsilon^2$ zu setzen, ebenso im Ansatze für $P\sigma_2$, $P\tau_2$ für $r>\varepsilon$ $\frac{x}{r^2}$ und $\frac{y}{r^2}$, für $r<\varepsilon$ 0 und 0.

Die betreffenden Anteile heben sich bei der weiteren Rechnung fort.

Man erhält

$$\begin{aligned} J(w_1+P w_2, p_1+P p_2) = & \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{5}{8}x(y^2-1)-\frac{P}{2\pi}\left(\frac{x}{r^2}-\frac{x}{1+x^2}\right)\right]^2\right. \\ & +\frac{1}{2}\left[\frac{5}{8}y(x^2=1)-\frac{P}{2\pi}\left(\frac{y}{r^2}-\frac{y}{1+y^2}\right)\right]^2-\frac{5}{16}(1-x^2)(1-y^2) \\ & \left.+\frac{P}{4\pi}\left[\ln r^2-\ln(1+x^2)-\ln(1+y^2)+\ln 2\right]\right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ & -\frac{5}{16}P+\frac{P^2}{2\pi}\left(\ln\varepsilon+\frac{1}{2}\ln 2\right) \\ & =-\frac{5}{18}-\frac{P}{\pi}\left(\frac{2}{3}+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{P^2}{4\pi}\ln\varepsilon+\frac{P^2}{\pi^2}\int_0^{\pi/4}\ln\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi+\frac{P^2}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right) \end{aligned} \quad . \; . \; (18),$$

$$\begin{aligned} K(\sigma_1+P\sigma_2, \tau_1+P\tau_2) = & \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{P}{2\pi}\frac{x}{r^2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{2}+\frac{P}{2\pi}\frac{y}{r^2}\right)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ & =\frac{1}{3}+\frac{P}{\pi}-\frac{P^2}{4\pi}\ln\varepsilon-\frac{P^2}{\pi^2}\int_0^{\pi/4}\ln\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned} \quad . \; . \; (19).$$

Die Werte $J(w_1, p_1)$, $J(P w_2. P p_2)$, $K(\sigma_1, \tau_1)$, $K(P\sigma_2, P\tau_2)$ sind ebenfalls durch Gl. (18) und (19) durch die Glieder ohne $P$ bzw. mit $P^2$ gegeben.

Die Ungleichungen (16) und (17) geben

$$-P w_{1\,wm} \leqq \frac{1}{18}-\frac{P}{\pi}\cdot 0{,}9285+\frac{P^2}{\pi^2}\cdot 0{,}1427 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20),$$

$$P w_{1\,wm} \leqq \frac{1}{18}+\frac{P}{\pi} \qquad +\frac{P^2}{\pi^2}\cdot 0{,}1427 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21).$$

Ersetzen wir in Ungleichung (20) $P$ durch $-\overline{P}$ und lassen den Querstrich fort, so erhalten wir

$$P w_{1\,wm} \leqq \frac{1}{18}+\frac{P}{\pi}\cdot 0{,}9285+\frac{P^2}{\pi^2}\cdot 0{,}1427 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (22).$$

Ungleichungen (21) und (22) unterscheiden sich nur durch das mittlere Glied der rechten Seite. Allgemein lauten sie:

$$P w_{1\,wm} \leqq a+P b+P^2 c.$$

Wir teilen die Ungleichung durch $|P|$

$$\frac{P}{|P|} w_{1\,wm} \leqq \frac{a}{|P|}+\frac{P}{|P|}b+|P|\,c.$$

Für die rechte Seite wollen wir $P_{\mathrm{opt}}$ finden, für das sie den kleinsten Wert annimmt. Das Glied $\frac{P}{|P|}b$ ist hierbei unveränderlich. Man erhält

$$-\frac{a}{P^2_{\mathrm{opt}}}+c=0, \quad P_{\mathrm{opt}}=\pm\sqrt{a/c}.$$

Für $P_{opt} = +\sqrt{a/c}$ folgt $w_{1\,wm} \leqq 2\sqrt{a\,c} + b$,

für $P_{opt} = -\sqrt{a/c}$ folgt $w_{1\,wm} \geqq -2\sqrt{a\,c} + b$.

Jede der Ungleichungen (21) und (22) gibt Eingrenzungen nach beiden Seiten; aus (21) folgt

$$\frac{1}{\pi}(1 - 0{,}1778) \leqq w_{1\,wm} \leqq \frac{1}{\pi}(1 + 0{,}1778),$$

aus (22) folgt:

$$\frac{1}{\pi}(0{,}9285 - 0{,}1778) \leqq w_{1\,wm} \leqq \frac{1}{\pi}(0{,}9285 + 0{,}1778).$$

Die gesamte Eingrenzung wird hier etwas schärfer als durch die Ungleichung (21) bzw. (22) allein.

Die Eingrenzungsspanne durch jede der Ungleichungen allein ist $4\sqrt{a\,c}$; hierin ist $a$ die Eingrenzungsspanne der Ansätze für die Belastung $p_1$ und $c$ die Eingrenzungsspanne der Ansätze für die Belastung $p_2$. Sind also die Ansätze für $p_1$ oder die Ansätze für $p_2$ die richtigen Lösungen, so wird $w_{1\,wm}$ eingegrenzt durch Werte, die sich nicht unterscheiden, die also den wirklichen Wert geben.

## IV. Zusammenfassung.

Die Verschiebung der Membranenmitte wird durch Näherungsansätze eingegrenzt. Die Eingrenzung gelingt durch geeignete Kombination der Ungleichungen, die aus den Minimalsätzen folgen. Benötigt werden hierbei Näherungsansätze sowohl für die gegebene Belastung, als auch für eine Einzelkraft $P$ in dem Punkte, dessen Verschiebung eingegrenzt werden soll. Durch geeignete Wahl von $P = P_{opt}$ erhält man die schärfste Eingrenzung. Sind die Näherungsansätze für die gegebene Belastung oder für die Einzelkraft $P$ die wahren Lösungen, so erhält man den wirklichen Wert der Verschiebung. 357

# Eingrenzung von Verschiebungen und Zerrungen mit Hilfe der Minimalsätze.

Von *Constantin Weber* in Dresden.

*Die Verschiebung eines Punktes eines beliebig belasteten Körpers wird durch geeignete Verbindung der beiden Minimalsätze der Elastizitätslehre eingegrenzt. Hierzu werden Näherungslösungen für die Verschiebungen und für die Spannungen gebraucht, sowohl für die gegebene Belastung, als auch für eine Einzelkraft in dem Punkte, dessen Verschiebung gesucht wird. Die Lösungen für die Einzelkraft müssen im Angriffspunkte die richtige Singularität besitzen. Ebenso können Linearkombinationen verschiedener Verschiebungen und folglich auch Dehnungen und Spannungen eingegrenzt werden.*

Ich zeigte in einer früheren Mitteilung [1]), wie mit Hilfe der Minimalsätze der Elastizitätstheorie der Weg einer Kraftgröße eingegrenzt werden kann, und in einer späteren Arbeit [2]), wie die Methode zu ergänzen ist, um die Verschiebung des Angriffspunktes einer zweiten Kraftgröße zu bestimmen. Ich nahm an, daß hiermit die praktische Verwendung der Minimalsätze in dieser Richtung erschöpft ist. Es ergab sich aber, daß noch weitere Fragen hiermit gelöst werden können.

So zeige ich in dieser Arbeit, wie bei beliebiger Belastung und Stützung eines elastischen Körpers, für den das Hookesche Gesetz gilt, die Verschiebung eines beliebigen Punktes eingegrenzt werden kann. Weiter wird die Methode auch für die Zerrung (Dehnung oder Schiebung) in diesem Punkte abgeändert, so daß hiermit auch die Spannungen näherungsweise bestimmt werden können. Wenn ich mich auf den zweidimensionalen ebenen Zerrungszustand beschränke, so geschieht es nur mit Rücksicht auf die Darlegung.

[1]) Z. angew. Math. Mech. Bd. 11 (1931), S. 24 und 25.
[2]) Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938), S. 375 bis 379.

## I. Die Minimalsätze der Elastizitätstheorie.

Ein zweidimensionaler Körper (ebenes Zerrungssystem mit $\varepsilon_z = 0$) sei beliebig gestützt und belastet, siehe z. B. Bild 1. Die Komponenten der Oberflächenkräfte auf das Oberflächenteilchen d $\mathfrak{o}$ seien $\Xi$ d $\mathfrak{o}$ und $H$ d $\mathfrak{o}$. Wir nehmen ein beliebiges Verschiebungssystem $u, v, w$ ($w = 0$, da $\varepsilon_z = 0$) an, das mit den vorgegebenen Randverschiebungen im Einklange ist. Diese Randverschiebungen in den Stützflächen mögen gleich null sein.

Aus den angenommenen Verschiebungen werden die Zerrungen $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$, $\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$ bestimmt. Im Teilchen $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ ist dann die Zerrungsenergie

$$a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = G\left\{(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2) + \frac{\mu}{1-2\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 + \frac{1}{2}\gamma_{xy}^2\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

aufgespeichert. Für den ganzen Körper erhält man durch Integration die Zerrungsenergie $A = \iiint_V a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Infolge der Randverschiebungen wird die potentielle Energie der äußeren Kräfte um den Betrag $\int_{\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}}(\Xi u + H v)\,\mathrm{d}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$ verringert, wobei nur über diejenigen Oberflächenelemente $\mathrm{d}\mathfrak{o} = \mathrm{d}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}$ zu integrieren ist, für die die Belastungskräfte gegeben sind.

Die wahren Verschiebungen seien $u_w, v_w, w_w = 0$ und die daraus zu berechnende Zerrungsenergie sei $A_w$. Dann folgt aus dem Satze vom Minimum der potentiellen Energie[3]):

$$A - \int_{\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}}(\Xi u + H v)\,\mathrm{d}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}} \geqq A_w - \int_{\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}}(\Xi u_w + H v_w)\,\mathrm{d}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}.$$

Für die wahren Verschiebungen ist $A_w$ gleich der Hälfte der Verringerung der potentiellen Energie der äußeren Kräfte, so daß man die Ungleichung in folgender Form schreiben kann:

$$A - \int_{\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}}(\Xi u + H v)\,\mathrm{d}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}} \geqq -\frac{1}{2}\int_{\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}}(\Xi u_w + H v_w)\,\mathrm{d}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Nunmehr nehmen wir ein beliebiges Spannungssystem $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, das die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt und mit den gegebenen Randkräften im Gleichgewichte ist. Im Teilchen $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ ist dann die Spannungsenergie

$$b\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4G}\left\{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{1+\mu}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + 2\,\tau_{xy}^2\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

aufgespeichert. Für den ganzen Körper erhält man

$$B = \iiint_V b\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Da die vorgegebenen Randverschiebungen gleich null sind, so ist die Spannungsenergie gleichzeitig die Ergänzungsenergie des Systemes.

Die wahren Spannungen seien mit dem Index $w$ gekennzeichnet, ebenso die wahre Spannungsenergie, die infolge des Hookeschen Gesetzes gleich der Zerrungsenergie ist:

$$B_w = A_w = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}}(\Xi u_w + H v_w)\,\mathrm{d}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}.$$

Aus dem Satze vom Minimum der Ergänzungsenergie (Satz von Castigliano) folgt:

$$B \geqq B_w$$

oder

$$B \geqq \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}}(\Xi u_w + H v_w)\,\mathrm{d}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

---

[3]) E. Trefftz: Handb. d. Physik, Bd. VI, Kap. 2. Math. Elastizitätslehre, S. 666 u. f. — C. Weber: Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938), S. 375 bis 379. Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941), S. 32 bis 42.

## II. Eingrenzung der Verschiebung eines Randpunktes.

Im Randpunkte $O$ (Bild 1) soll die Verschiebungskomponente in einer beliebigen Richtung infolge einer gegebenen Belastung eingegrenzt werden. Wir legen durch $O$ ein Koordinatensystem, die $x$-Achse in Richtung der Verschiebungskomponente, die $y$-Achse senkrecht dazu. Im Punkte $O$ bringen wir eine Kraft $P$ an, die in Richtung der $x$-Achse wirkt. Bei gewissen Überlegungen denken wir uns die Kraft $P$ auf die kleine Länge $\varepsilon$ verteilt, um unendlich große Spannungen, Zerrungen und Verschiebungen zu vermeiden.

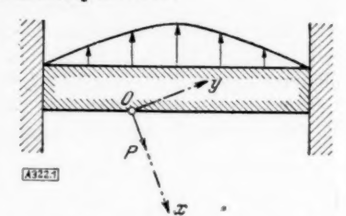



Bild 1. Beispiel zur Eingrenzung einer Verschiebung.

Für die gegebene Belastung und Stützung und für die Kraft $P$ und derselben Stützung wollen wir erst für das Verschiebungssystem, dann für das Spannungssystem Näherungslösungen angeben. Die Näherungslösungen können auch einen oder mehrere Parameter enthalten, die noch frei wählbar sind.

Die Näherungslösung für das Verschiebungssystem für die gegebene Belastung sei $u_1$, $v_1$, $w_1 = 0$; es sind hierbei nur die Randbedingungen in den Stützflächen zu beachten, d. h. es müssen dort entsprechend unseren Annahmen $u_1 = v_1 = 0$ sein.

Für die Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft $P$ stellen wir auf folgendem Wege Näherungslösungen auf. Wirkt die Kraft $P$ auf eine Halbebene, deren Begrenzung mit der Tangente an den Körper im Punkte $O$ zusammenfällt, so erhält man mit $\varepsilon \to 0$, wenn $P = 1$ gesetzt wird, den Verschiebungszustand:

$$u_2 = \frac{1}{\pi G}\left[\frac{1}{2}\frac{x^2}{x^2+y^2} - (1-\mu)\ln r\right], \qquad \text{mit } r^2 = x^2 + y^2$$

$$v_2 = \frac{1}{\pi G}\left[\frac{1}{2}\frac{x\,y}{x^2+y^2} - \left(\frac{1}{2}-\mu\right)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right].$$

Das Verschiebungssystem folgt aus der Airyschen Spannungsfunktion $F_2 = -\frac{1}{\pi}\, y \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

In den Stützflächen erhalten wir Verschiebungen, die nicht null werden. Wir überlagern darum ein weiteres beliebiges Verschiebungssystem $u_3$, $v_3$, das diese Randverschiebungen wieder aufhebt.

Für die Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft $P$ erhält man dann als Näherungslösung:

$$u_P = P(u_2 + u_3), \qquad v_P = P(v_2 + v_3).$$

Jetzt wollen wir Näherungslösungen für das Spannungssystem, sowohl für die gegebene Belastung als auch für die Kraft $P$ angeben.

Die Näherungslösung für die gegebenen Belastungskräfte seien die Spannungen $\sigma_{x1}$, $\sigma_{y1}$, $\tau_{xy1}$, $\sigma_{z1} = \mu(\sigma_{x1} + \sigma_{y1})$, $\tau_{xz1} = \tau_{yz1} = 0$. Diese Spannungen müssen miteinander und mit den gegebenen Randkräften im Gleichgewichte sein.

Für die Kraft $P$ stellen wir wieder eine Näherungslösung auf, die aus zwei Teilen besteht. Wirkt wie vorher auf die Halbebene die Kraft $P$, so erhält man mit $\varepsilon \to 0$, wenn $P = 1$ gesetzt wird, das Spannungssystem

$$\sigma_{x2} = -\frac{2}{\pi}\frac{x^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\sigma_{y2} = -\frac{2}{\pi}\frac{x\,y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\tau_{xy2} = -\frac{2}{\pi}\frac{x^2\,y}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\sigma_{z2} = \mu(\sigma_{x2} + \sigma_{y2}),$$

$$\tau_{xz2} = \tau_{yz2} = 0.$$

Die Spannungen folgen aus der angegebenen Spannungsfunktion $F_2$. Die Randflächen, an denen keine Stützung erfolgt, sind dann allgemein nicht spannungsfrei. An der Fläche $d\mathfrak{o}$, deren äußere Normale mit der $x$-Achse den Winkel $\alpha$ bildet, müssen die Kräfte

$$\Xi_2\, d\mathfrak{o} = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{r}\cos^2\varphi\cos(\varphi-\alpha)\, d\mathfrak{o},$$

$$H_2\, d\mathfrak{o} = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{r}\cos\varphi\sin\varphi\cos(\varphi-\alpha)\, d\mathfrak{o}$$

angreifen, damit Gleichgewicht vorhanden ist ($\varphi$ und $r$ — Polarkoordinaten, also $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$). Da die Randflächen aber spannungsfrei sein sollen, fügen wir ein beliebiges Spannungssystem $\sigma_{x_3}$, $\sigma_{y_3}$, $\tau_{x y_3}$ usw. hinzu, das mit den Kräften $\Xi_3\,\mathrm{d}\mathfrak{o} = -\Xi_2\,\mathrm{d}\mathfrak{o}$, $H_3\,\mathrm{d}\mathfrak{o} = -H_2\,\mathrm{d}\mathfrak{o}$ im Gleichgewichte ist. Beide Spannungssysteme bilden zusammen das gesuchte Spannungssystem für die Kraft $P = 1$, welches allgemein nur eine Näherungslösung sein wird. Für die Kraft $P$ erhält man somit:

$$\sigma_{xP} = P(\sigma_{x_2} + \sigma_{x_3}),$$
$$\sigma_{yP} = P(\sigma_{y_2} + \sigma_{y_3}),$$
$$\tau_{xyP} = P(\tau_{xy_2} + \tau_{xy_3})$$
usw.

Nunmehr bilden wir für den Körper, der durch die gegebenen Kräfte $\Xi_1\,\mathrm{d}\mathfrak{o}$, $H_1\,\mathrm{d}\mathfrak{o}$ und durch die Kraft $P$ belastet ist, die potentielle Energie. Als Verschiebungssystem nehmen wir die Näherungslösung $u = u_1 + P(u_2 + u_3)$, $v = v_1 + P(v_2 + v_3)$. Die Verschiebung in $x$-Richtung des Flächenstückes $\varepsilon$ in der Umgebung des Punktes $O$, auf das die Kraft $P$ verteilt ist, ist $u_0 = u_{01} + P(u_{02} + u_{03})$. Hierin ist $u_{01}$ die von uns gesuchte Größe, die den wahren Wert der Verschiebung $u_{01w}$ nach einer Seite eingrenzen soll.

Die Zerrungsenergie $a$ enthält Glieder von der Gestalt

$$\left[\frac{\partial(u_1 + P(u_2 + u_3))}{\partial x}\right]^2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + 2P\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x} + 2P\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_3}{\partial x} + P^2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + P^2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2 + 2P^2\frac{\partial u_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x}.$$

Durch Ordnen der Glieder nach den Indizes zerfällt auch $a$ in entsprechende Bestandteile:

$$a = a_{11} + 2P\,a_{12} + 2P\,a_{13} + P^2\,a_{22} + P^2\,a_{33} + 2P^2\,a_{23}.$$

Durch Integration über den ganzen Körper erhält man:

$$A = A_{11} + 2P\,A_{12} + 2P\,A_{13} + P^2 A_{22} + P^2 A_{33} + 2P^2 A_{23}.$$

Ungleichung (1) wird hiermit:

$$A_{11} + 2P A_{12} + 2P A_{13} + P^2 A_{22} + P^2 A_{33} + 2P^2 A_{23}$$
$$-\int_{\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}}[\Xi_1(u_1 + P(u_2 + u_3)) + H_1(v_1 + P(v_2 + v_3))]\,\mathrm{d}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}} - P[u_{01} + P(u_{02} + u_{03})] \geqq$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}}[\Xi_1(u_{1w} + P(u_{2w} + u_{3w})) + H_1(v_{1w} + P(v_{2w} + v_{3w}))]\,\mathrm{d}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}} - \frac{1}{2}P[u_{01w} + P(u_{02w} + u_{03w})].$$

Wirkt die Kraft $P = 1$ auf einen Punkt, so wird $u_{02}$ und $u_{02w}$ unendlich. Um dieses zu vermeiden, denken wir uns $P = 1$ auf eine kleine Strecke $\varepsilon$ verteilt. Verteilt man die Kraft gleichmäßig, so ist für $u_{02}$ der Mittelwert der Verschiebungen in $x$-Richtung zu nehmen für alle Randpunkte, die zu $\varepsilon$ gehören. Man kann aber auch von der Vorstellung ausgehen, daß $P = 1$ so auf die Strecke $\varepsilon$ verteilt ist, daß ein einheitliches $u_{02}$ entsteht.

Da der Verschiebungszustand $u_2$, $v_2$ die wahre Lösung des elastischen Problemes einer durch die Kraft $P = 1$ belasteten Halbebene ist, so wird

$$A_{22} - \int_{\mathfrak{o}}(\Xi_2 u_2 + H_2 v_2)\,\mathrm{d}\mathfrak{o} - u_{02} = -A_{22} = -B_{22}.$$

Das Integral ist über die ganze Oberfläche einschließlich der Stützflächen zu nehmen.

Dieses setzen wir in die linke Seite der Ungleichung ein, um $u_{02}$, das für $\varepsilon \to 0$ unendwird, zu beseitigen:

$$\left.\begin{aligned}
&A_{11} + 2P A_{12} + 2P A_{13} + P^2 A_{33} + 2P^2 A_{23} - P^2 B_{22}\\
&-\int_{\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}}[\Xi_1(u_1 + P(u_2 + u_3)) + H_1(v_1 + P(v_2 + v_3))]\,\mathrm{d}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}} + P^2\int_{\mathfrak{o}}(\Xi_2 u_2 + H_2 v_2)\,\mathrm{d}\mathfrak{o}\\
&-P(u_{01} + P u_{03}) \geqq\\
&-\frac{1}{2}\int_{\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}}[\Xi_1(u_{1w} + P(u_{2w} + u_{3w})) + H_1(v_{1w} + P(v_{2w} + v_{3w}))]\,\mathrm{d}\mathfrak{o}_{\mathfrak{P}}\\
&-\frac{1}{2}P(u_{01w} + P(u_{02w} + u_{03w}))
\end{aligned}\right\} \quad . . (3).$$

Nunmehr stellen wir die Ungleichung (2) auf, einmal für die gegebene Belastung, dann für die Kraft $P$. Die Spannungsenergien $B$ werden entsprechend den Indizes der Spannungen jeweils mit zwei Indizes versehen.

Für die gegebene Belastung erhält man:

$$B_{11} \geqq \frac{1}{2} \int_{o_{\mathfrak{P}}} (\Xi_1 u_{1w} + H_1 v_{1w}) \, d\, o_{\mathfrak{P}} \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Für die Kraft $P$ erhält man

$$P^2 (B_{22} + B_{33} + 2 B_{23}) \geqq \frac{1}{2} P^2 (u_{02w} + u_{03w}) \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Durch Addition der Ungleichungen (3), (4) und (5) folgt:

$$\begin{aligned} &A_{11} + 2PA_{12} + 2PA_{13} + P^2 A_{33} + 2P^2 A_{23} + B_{11} + P^2 B_{33} + 2P^2 B_{23} \\ &- \int_{o_{\mathfrak{P}}} [\Xi_1 (u_1 + P(u_2 + u_3)) + H_1 (v_1 + P(v_2 + v_3))] \, d\, o_{\mathfrak{P}} + P^2 \int_{o} (\Xi_2 u_2 + H_2 v_2) \, d\, o \\ &- P(u_{01} + u_{03}) \geqq - \frac{1}{2} P \int_{o_{\mathfrak{P}}} [\Xi_1 (u_{2w} + u_{3w}) + H_1 (v_{2w} + v_{3w})] \, d\, o_{\mathfrak{P}} - \frac{1}{2} P u_{01w}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite besteht aus einem Integrale und dem Gliede $-\frac{1}{2} P u_{01w}$. Beide Glieder sind gleich nach dem Maxwellschen Verschiebungsgesetze, das für die wahren Verschiebungen gilt. Auf der rechten Seite steht folglich $-P u_{01w}$. Teilt man die Ungleichung durch $-|P|$, da $P$ sowohl positiv, wie auch negativ sein kann, so erhält man für die gesuchte Verschiebung:

$$\left.\begin{aligned} &u_{01w} \frac{P}{|P|} \geqq - \frac{1}{|P|} \{ A_{11} + 2PA_{12} + 2PA_{13} + P^2 A_{33} + 2P^2 A_{23} \\ &+ B_{11} + P^2 B_{33} + 2P^2 B_{23} - \int_{o_{\mathfrak{P}}} [\Xi_1 (u_1 + P(u_2 + u_3)) + H_1 (v_1 + P(v_2 + v_3))] \, d\, o_{\mathfrak{P}} \\ &+ P^2 \int_{o} (\Xi_2 u_2 + H_2 v_2) \, d\, o - P(u_{01} + P u_{03}) \} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6).$$

Alle Glieder der rechten Seite folgen durch Integration aus den gewählten Ansätzen für die Verschiebungen und Spannungen. Die Energien $A_{22}$ und $B_{22}$, die unendlich werden, sind herausgefallen. Hiermit ist die Einführung dieser Lösungsanteile begründet.

In allen Ansätzen können noch freiwählbare Parameter enthalten sein, die so zu wählen sind, daß die rechte Seite zum Extremum wird.

Dasselbe gilt auch für die Größe $P$. Die rechte Seite enthält Glieder mit $P^{-1}$, $P^0$ und $P^{+1}$; durch Differentiation nach $P$ erhält man eine Bestimmungsgleichung für $P$ mit Gliedern, die $P^{-2}$ und $P^0$ enthalten. Man erhält zwei Werte für $P$ mit entgegengesetzten Vorzeichen. Setzt man diese Werte in Ungleichung (6) ein, so erhält man eine Eingrenzung von $u_{01w}$ nach oben und nach unten. Wir werden im weiteren $u_{01w}$ noch nach einer zweiten Methode eingrenzen.

Die zweite Methode der Eingrenzung besteht darin, daß wir erst die Ungleichung (2) für die gegebene Belastung und Kraft $P$ zusammen aufstellen, dann die Ungleichung (1) für die Belastung allein und für die Kraft $P$ allein. Durch Addition der so erhaltenen drei Ungleichungen und Division durch $|P|$ erhält man für $u_{01w}$ die Ungleichung:

$$\left.\begin{aligned} &u_{01w} \frac{P}{|P|} \leqq \frac{1}{|P|} \{ A_{11} + 2P^2 A_{23} + P^2 A_{33} + B_{11} + 2PB_{12} \\ &+ 2PB_{13} + P^2 B_{33} + 2P^2 B_{23} - \int_{o_{\mathfrak{P}}} (\Xi_1 u_1 + H_1 v_1) \, d\, o_{\mathfrak{P}} + P^2 \int_{o} (\Xi_2 u_2 + H_2 v_2) \, d\, o - P^2 u_{03} \} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7).$$

Auch hier wird $P$ zweckmäßig so bestimmt, daß die rechte Seite zum Extremum wird. Man erhält wieder zwei Werte für $P$, die sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden. Ungleichung (7) gibt hiermit ebenfalls eine Eingrenzung von $u_{01w}$ nach oben und unten.

Von den so erhaltenen zwei Eingrenzungen nach oben und zwei Eingrenzungen nach unten wird man diejenigen wählen, die $u_{01w}$ am stärksten eingrenzen.

## III. Eingrenzung der Dehnung in einem Randpunkte.

Wir nehmen erst nach Bild 2 die benachbarten Randpunkte $O\,(x=0, y=0)$ und $O'\,(x=-\delta, y=0)$ und bringen in $O$ die Kraft $P/\delta$ in positiver $x$-Richtung in $O'$ die Kraft $P/\delta$ in negativer $x$-Richtung an.

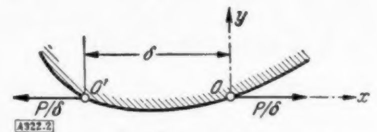



Bild 2. Zur Eingrenzung der Dehnung in einem Randpunkte.

Im weiteren wird genau so vorgegangen, wie im vorherigen Abschnitte. Der Verschiebungszustand für die Halbebene wird für $P=1$:

$$u_2=\frac{1}{\delta\pi G}\left\{\left[\frac{1}{2}\frac{x^2}{x^2+y^2}-(1-\mu)\ln r\right]-\left[\frac{1}{2}\frac{(x+\delta)^2}{(x+\delta)^2+y^2}-(1-\mu)\ln r'\right]\right\}$$

$$v_2=\frac{1}{\delta\pi G}\left\{\left[\frac{1}{2}\frac{x\,y}{x^2+y^2}-\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right]-\left[\frac{1}{2}\frac{(x+\delta)\,y}{(x+\delta)^2+y^2}-\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\operatorname{arctg}\frac{y}{x+\delta}\right]\right\}$$

mit

$$r^2=x^2+y^2, \quad r'^2=(x+\delta)^2+y^2.$$

Für die Kräfte $P/\delta$ sind diese Werte noch mit $P$ zu multiplizieren.

Die Spannungen werden

$$\sigma_{x\,2}=-\frac{2}{\delta\pi}\left(\frac{x^3}{r^4}-\frac{(x+\delta)^3}{r'^4}\right) \quad \text{usw.}$$

Die wahren Verschiebungen der Punkte $O$ und $O'$ in $x$-Richtung durch die gegebene Belastung sind $u_{0\,1\,w}$ und $u_{0'\,1\,w}$; die durch die Eingrenzung bestimmte Größe wird

$$\frac{u_{01\,w}-u_{0'1\,w}}{\delta}\,\frac{P}{|P|}.$$

Das ist aber die durchschnittliche Dehnung zwischen $O'$ und $O$.

Läßt man $\delta\to 0$ gehen, so erhält man für $P=1$ und für die Halbebene die Verschiebungen

$$u_2=-\frac{1}{\pi G}\left[\frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}-\mu\frac{x}{x^2+y^2}\right],$$

$$v_2=-\frac{1}{\pi G}\left[\frac{-y^3}{(x^2+y^2)^2}+\mu\frac{y}{x^2+y^2}\right]$$

und die Spannungen

$$\sigma_{x\,2}=\frac{2}{\pi}\,\frac{x^4-3\,x^2\,y^2}{(x^2+y^2)^3} \quad \text{usw.}$$

Die durch die Eingrenzung bestimmte Größe wird dann

$$\varepsilon_{x\,0\,w}\frac{P}{|P|},$$

die Dehnung in $x$-Richtung im Punkte $O$.

Da die Spannung in $y$-Richtung im Punkte $O$ bekannt ist (sie sei $\sigma_{y_0}$), so kann auch die Spannung $\sigma_{x\,0\,w}$ berechnet werden:

$$\sigma_{x\,0\,w}=\frac{1}{1-\mu}\,(2\,G\,\varepsilon_{x\,0\,w}+\mu\,\sigma_{y_0}).$$

Hiermit ist auch $\sigma_{x\,0\,w}$ eingegrenzt.

## IV. Eingrenzung der Verschiebung eines inneren Punktes und der Dehnung und Spannung in diesem Punkte.

Die Eingrenzung der Verschiebung in $x$-Richtung eines inneren Punktes wird in gleicher Weise wie vorher durchgeführt. Nur sind andere Ansätze für $u_2$, $v_2$ und $\sigma_{x_2}$, $\sigma_{y_2}$, $\tau_{x\,y_2}$ zu verwenden. Wirkt im Punkte $x=y=0$ im Inneren eine Kraft $P=1$, so erhält man die Airysche Spannungsfunktion

$$F_2=\frac{-1}{2\pi}\left[x\ln r-y\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2\,(1-\mu)}\,x\ln r\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Aus dieser Spannungsfunktion kann der Spannungszustand und Verschiebungszustand bestimmt werden.

Um die Dehnung in $x$-Richtung zu bestimmen, bringen wir auf der $x$-Achse in den Punkten $O$ mit $x=0$ und $O'$ mit $x=-\delta$ die Kräfte $P/\delta$ wie vorher an und lassen $\delta$ gegen null gehen. Dann geht $F_2$ über in eine neue Spannungsfunktion $F_2'$, die aus $F_2$ nach Gl. (8) sich berechnen läßt:

$$F_2' = -\frac{\partial}{\partial x} F_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9).$$

Aus den Dehnungen lassen sich die Spannungen ermitteln:

$$\sigma_x = \frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} G \left[\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_y\right].$$

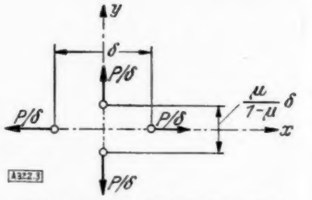



Bild 3. Zur Eingrenzung einer Spannung in einem inneren Punkte.

Um den Ausdruck $\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-\mu} \varepsilon_y$ einzugrenzen, bringen wir nach Bild 3 im Punkte $O\left(x=\frac{\delta}{2}, y=0\right)$ die Kraft $P/\delta$ in $x$-Richtung, im Punkte $O'\left(x=-\frac{\delta}{2}, y=0\right)$ die Kraft $P/\delta$ in negativer $x$-Richtung, im Punkte $O''\left(x=0,\ y=\frac{\mu}{2(1-\mu)}\delta\right)$ die Kraft $P/\delta$ in positiver $y$-Richtung und im Punkte $O'''\left(x=0,\ y=-\frac{\mu}{2(1-\mu)}\delta\right)$ die Kraft $P/\delta$ in negativer $y$-Richtung an. Läßt man dann $\delta \to 0$ gehen, so erhält man den gesuchten Ausdruck. Man kann aber auch $\varepsilon_x$ und $\varepsilon_y$ getrennt eingrenzen und dann den betreffenden Ausdruck bilden. 322

# Über die Kompensation der Reibung durch zusätzliche Schwingbewegungen.

Von *G. Heinrich* in Wien.

*Zur Klärung der Frage, wieweit es möglich ist, durch Überlagerung einer schwingenden Bewegung die Reibung zu kompensieren, wird der Einfluß solcher kleinen Schwingungen einer ebenen horizontalen Unterlage auf die als nicht geschwindigkeitsabhängig angenommene Reibungskraft, die auf einem sich auf ihr bewegenden, schweren Körper wirkt, untersucht, sowohl für den Fall, daß sich der Körper in Richtung der Schwingungen, wie für den, daß er sich unter einem beliebigen Winkel gegen diese bewegt.*

Der Gedanke, die unvermeidliche Reibung, die bei der gleitenden Berührung zwischen zwei gegeneinander drückenden festen Körpern auftritt, durch zusätzliche Bewegungen der Gleitflächen in ihrer Wirkung möglichst auszuschalten, taucht meines Wissens nur in der Patentliteratur auf, ist aber bisher nicht zum Gegenstand einer wissenschaftlichen Untersuchung gemacht worden.

So wird in dem D. R. P. Nr. 349476[1]) ein Erfindungsgedanke unter Schutz gestellt, der es ermöglichen soll, drehbare Teile derart zu lagern, daß das Reibungsmoment, das bei ihrer Bewegung überwunden werden muß, ein möglichst geringes ist. Die Einrichtung ist „dadurch gekennzeichnet, daß der gesamte auf dem drehbaren Teil lastende Druck auf zwei getrennte Lager verteilt ist, die gleiche Reibungsmomente erzeugen und derartig angeordnet sind, daß die stützenden Glieder der beiden Lager während der Benutzung des Instruments dauernd ineinander entgegengesetztem Sinn um ihre gemeinsame Achse gedreht werden können, und zwar mit je einer Winkelgeschwindigkeit gegenüber dem drehbaren Teil, die stets wesentlich größer ist als die größte auftretende Winkelgeschwindigkeit des drehbaren Teils". Als Anwendungsgebiet ist vor allem an Meßinstrumente und feinmechanische Apparate gedacht. Das englische Patent Nr. 344239[2]) stellt den gleichen Erfindungsgedanken für die Lagerung von Kreiselgeräten unter Schutz.

Durch die angegebene Maßnahme ist eine vollständige Ausschaltung der Reibungswirkung möglich, solange man in einem Geschwindigkeitsbereich arbeitet, in dem die Reibung sich praktisch nicht ändert und solange die beiden entgegengerichteten Reibungsmomente genau

[1]) Firma Carl Zeiß in Jena. Einrichtung zur reibungsfreien Lagerung von drehbaren Teilen. (25. April 1925.)
[2]) Improvements in Gyroscope Suspensions. (March 5, 1931.)

entgegengesetzt gleich sind. Es ist aber besonders die letzte Bedingung nicht immer zu erfüllen, auch wenn man, wie beim angeführten D. R. P., das Reibungsmoment des einen Lagers einstellbar macht. Wenn sich nämlich während des Betriebes die Lagerdrücke und damit die Reibungsmomente ändern, wie dies z. B. bei Kreiselgeräten möglich ist, so ist eine dauernde Kompensation der Reibung auf dem angegebenen Weg nicht möglich.

Es besteht aber die Möglichkeit, auf die stützenden Glieder der beiden Lager eine schwingende Bewegung zu übertragen[3]). Da die Reibungsmomente in den beiden Drehrichtungen praktisch keine Verschiedenheit aufweisen, so ist zu erwarten, daß dadurch die Reibungswirkung weitgehend kompensiert werden kann.

Es soll im folgenden die Frage nach der Kompensation der Reibung durch Überlagerung einer schwingenden Bewegung in verallgemeinerter Form untersucht werden. Auf einer horizontalen Ebene befinde sich ein schwerer Körper und es wirke zwischen Körper und Unterlage, entgegen der Relativgeschwindigkeitsrichtung eine Reibungskraft, die in dem maßgeblichen Geschwindigkeitsbereich nicht geschwindigkeitsabhängig sein soll. Die Unterlage vollführe eine geradlinige hin- und hergehende Bewegung und zwar sei die Zeit für den Hingang genau gleich der Zeit für den Rückgang. Reibungskraft und Frequenz der Schwingung seien so bemessen, daß der Körper trotz der schwingenden Unterlage keine merkliche hin- und hergehende Bewegung ausführt. Ist $\tau$ die Schwingungsdauer der hin- und hergehenden Bewegung der Unterlage, so ist, bei Gültigkeit des Coulombschen Gesetzes, wenn $f$ den Reibungskoeffizienten und $m$ die Masse des Körpers bedeuten: $m \cdot \ddot{x} = f \cdot m \cdot g$ und daraus: $x = \frac{1}{8} \cdot f \cdot g \cdot \tau^2$; $x$ ist dann die Ablenkung der Masse $m$ während eines Hinganges (oder Rückganges) in Richtung der Schwingbewegung, wenn zu Beginn die Geschwindigkeit der Masse gleich Null war. Es soll also $f$ und $\tau$ so gewählt werden, daß der Wert $x$ unmerklich klein wird.

Bewegt sich nun der Körper in Richtung der hin- und hergehenden Bewegung durch äußere Einwirkung mit der Geschwindigkeit $v$, so entsteht die Frage, welche Wirkung hierbei die Reibung ausübt. Da der von der Reibung bei einem Hin- oder Rückgang übertragene Impuls nach Voraussetzung eine vernachlässigbar kleine Wirkung ausübt, kommt also für die Reibungswirkung nur der über eine längere Zeitdauer gemittelte Impuls in Betracht. Die diesem mittleren Impuls entsprechende Kraft soll als Scheinreibung bezeichnet werden. Sie ist demnach der Mittelwert der von der Unterlage ausgeübten Reibung, genommen über ein Zeitintervall, das groß ist im Vergleich zur Schwingungsdauer der hin- und hergehenden Bewegung.

Es sei $W_t$ der Augenblickswert der Reibung und $\tilde{W}_t$ der Betrag der Scheinreibung. Die Schwingbewegung der Unterlage sei harmonisch, ihre Kreisfrequenz sei $\omega$ und ihre Geschwindigkeit zur Zeit $t$ sei $u$. Es gilt dann:

$$u = u_0 \cos \omega t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Wird $v$ in Richtung des positiven $u$ positiv gezählt, so ist $v_{\mathrm{rel}} = v - u$ die Relativgeschwindigkeit des Körpers in bezug auf die Unterlage. Nach der Definition der Scheinreibung gilt also:

$$\tilde{W}_t = -\frac{1}{T} \int_0^T |W_t| \frac{v-u}{|v-u|} \cdot dt \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

wobei $T$ eine Zeit bedeutet, die groß ist gegen die Schwingungsdauer $\tau$. Man kann $T$ als ganzzahliges Vielfaches von $\tau$ einführen, da es auf Zeitintervalle in der Größenordnung von $\tau$ nicht ankommt. Man kann also setzen:

$$T = n\,\tau = \frac{2\pi n}{\omega} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3),$$

wobei $n$ eine große ganze Zahl bedeutet. Durch Einsetzen von (1) und (3) in (2) erhält man:

$$\tilde{W}_t = -\frac{\omega}{2\pi n} \int_0^{2\pi \frac{n}{\omega}} |W_t| \frac{v_0 - u_0 \cdot \cos \omega t}{|v_0 - u_0 \cdot \cos \omega t|} \, d t .$$

Setzt man:

$$\omega t = \varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

[3]) Vgl. K. Killian: Verfahren zur Aufnahme von Luftbildern, Allg. Vermess.-Nachr. 51. Jahrg. (1939), S. 21 bis 29 (siehe S. 27 u. 28).

so kann man auch schreiben:

$$\tilde{W}_t = -\frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi n} |W_t| \frac{v^* - \cos\varphi}{|v^* - \cos\varphi|} \cdot d\varphi \quad \ldots \ldots \quad (5),$$

wenn man zur Abkürzung:

$$v^* = \frac{v}{u_0} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

setzt, wobei $u_0$ als wesentlich positiv zu betrachten ist.

Es wird nun vorausgesetzt, daß die Änderungen von $|W_t|$ und $v^*$ während der Integrationszeit $T$ vernachlässigbar sind. Dann ist der Integrand von (5) eine periodische Funktion von $\varphi$ mit der Periode $2\pi$. Der Wert von (5) ist also für jedes ganzzahlige $n$ gleich. Man kann also etwa $n = 1$ setzen und erhält:

$$\tilde{W}_t = -\frac{|W_t|}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{v^* - \cos\varphi}{|v^* - \cos\varphi|} d\varphi \quad \ldots \ldots \quad (5a).$$

Man kann nun zwei Fälle unterscheiden.

1. Fall: $|v^*| > 1$, oder nach (6): $|v| > u_0$. Dann wechselt der Integrand von (5a) sein Vorzeichen im Integrationsintervall nicht. Man erhält also: $\tilde{W}_t = \mp W_t$, wobei das obere Vorzeichen für $v^* > 0$, das untere für $v^* < 0$ gilt. Ist demnach die Geschwindigkeit des Körpers größer als die maximale Geschwindigkeit der Unterlage, so stimmt die Scheinreibung mit der wirklichen Reibung überein.

2. Fall: $|v^*| < 1$, also: $|v| < u_0$. Nun ändert der Integrand von (5a) im Integrationsintervall das Vorzeichen, und zwar an der Stelle: $\varphi = \arccos v^*$. Ferner kann man das Integral in (5a) folgendermaßen umformen:

$$\int_0^{2\pi} \frac{v^* - \cos\varphi}{|v^* - \cos\varphi|} d\varphi = 2\int_0^{\pi} \frac{v^* - \cos\varphi}{|v^* - \cos\varphi|} d\varphi .$$

Man kann also (5a) schreiben:

$$\tilde{W}_t = -\frac{|W_t|}{\pi}\left[\int_0^{\arccos v^*} \frac{v^* - \cos\varphi}{|v^* - \cos\varphi|} d\varphi + \int_{\arccos v^*}^{\pi} \frac{v^* - \cos\varphi}{|v^* - \cos\varphi|} d\varphi\right].$$

Die Integration liefert:

$$\tilde{W}_t = -|W_t|\left[1 - \frac{2}{\pi}\arccos v^*\right] \quad \ldots \ldots \quad (7),$$

wobei das Minuszeichen sowohl für $v^* > 0$ als auch für $v^* < 0$ gilt. Man sieht aus (7), daß die Scheinreibung nur von dem Geschwindigkeitsverhältnis (6) abhängt. Da insbesondere die Scheinreibung für kleine Körpergeschwindigkeiten ($v^* \ll 1$) interessiert, soll (7) in eine Potenzreihe entwickelt werden. Man erhält:

$$\tilde{W}_t = -\frac{2}{\pi}|W_t|\left(v^* + \frac{v^{*3}}{6} + \cdots\right) \quad \ldots \ldots \quad (7a).$$

Aus (7a) erkennt man, daß für sehr kleine Körpergeschwindigkeiten die Scheinreibung der Geschwindigkeit proportional ist. Sie verhält sich also wie eine Flüssigkeitsreibung. Für $v^* = 0$ verschwindet sie vollständig, sie wirkt sich also, im Gegensatz zur Coulombschen Reibung in der Gleichgewichtslage nicht mehr störend aus.

Deutet man $W_t$ als Reibungsmoment, so läßt sich dieses Ergebnis in gleicher Weise auf das Scheinreibungsmoment einer schwingenden Lagerung übertragen. Ordnet man zwei Lager an, deren Schwingungen der Phase nach entgegengesetzt sind und deren Reibungsmomente $W_{t_1}$ und $W_{t_2}$ ungefähr übereinstimmen, so gilt auch hierfür die Gl. (7), wenn man $|W_t| = |W_{t_1}| + |W_{t_2}|$ setzt; überdies werden auf diese Weise die Wirkungen der einzelnen Lagerschwingungen weitgehend kompensiert. Für sehr langsame Bewegungen erscheint also die Reibungswirkung praktisch ausgeschaltet.

Kehrt man wieder zur ursprünglichen Anordnung zurück, so ergibt sich die Frage, wie sich die Scheinreibung verhält, wenn die Geschwindigkeit $v$ unter einem beliebigen Winkel gegen die positive $u$-Richtung geneigt ist. Auf das Lager angewendet bedeutet dies, daß man auch axiale Verschiebungen zuläßt.

Legt man die $x$-Achse eines ebenen Koordinatensystems in die positive $u$-Richtung, die $y$-Achse senkrecht dazu, so sind die Komponenten der Relativbewegung $v_{\mathrm{rel}}$ des Körpers gegen die Unterlage:

$$\left.\begin{aligned} v_{\mathrm{rel}\,x} &= v_x - u_0 \cos\varphi \\ v_{\mathrm{rel}\,y} &= v_y \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Die Komponenten der Scheinreibung sind dann gegeben durch:

$$\tilde{W}_{t\,x} = -\frac{1}{T}\int_0^T |W_t| \frac{v_{\mathrm{rel}\,x}}{|v_{\mathrm{rel}}|} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9),$$

$$\tilde{W}_{t\,y} = -\frac{1}{T}\int_0^T |W_t| \frac{v_{\mathrm{rel}\,y}}{|v_{\mathrm{rel}}|} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10).$$

Mit den Abkürzungen:

$$\left.\begin{aligned} v_x^* &= \frac{v_x}{u_0} \\ v_y^* &= \frac{v_y}{u_0} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

erhält man aus (9) und (10) durch Einsetzen von (8), (4) und (3):

$$\tilde{W}_{t\,x} = -\frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi n} |W_t| \frac{v_x^* - \cos\varphi}{+\sqrt{(v_x^* - \cos\varphi)^2 + v_y^{*2}}}\,\mathrm{d}\varphi \quad \ldots \ldots \quad (9\mathrm{a}),$$

$$\tilde{W}_{t\,y} = -\frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi n} |W_t| \frac{v_y^*}{+\sqrt{(v_x^* - \cos\varphi)^2 + v_y^{*2}}}\,\mathrm{d}\varphi \quad \ldots \ldots \quad (10\mathrm{a}).$$

Macht man wieder die Voraussetzung, daß die Änderungen von $|W_t|$, $v_x^*$ und $v_y^*$ während der Zeit $T$ vernachlässigbar klein bleiben, so lassen sich die Integrale in gleicher Art wie früher transformieren und man erhält:

$$\tilde{W}_{t\,x} = -\frac{|W_t|}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{v_x^* - \cos\varphi}{+\sqrt{(v_x^* - \cos\varphi)^2 + v_y^{*2}}}\,\mathrm{d}\varphi \quad \ldots \ldots \quad (9\mathrm{b}),$$

$$\tilde{W}_{t\,y} = -\frac{|W_t|}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{v_y^*}{+\sqrt{(v_x^* - \cos\varphi)^2 + v_y^{*2}}}\,\mathrm{d}\varphi \quad \ldots \ldots \quad (10\mathrm{b}).$$

Die Integrale von (9b) und (10b) sind elliptisch. Ihre geschlossene Lösung soll hier nicht gesucht werden, da ja vor allem die Lösung für kleine $v_x^*$ und $v_y^*$ interessiert.

$\tilde{W}_{t\,x}$ und $\tilde{W}_{t\,y}$ erscheinen nach (9b) und (10b) als Funktionen der beiden Variabeln $v_x^*$ und $v_y^*$. Sie haben daher die Form:

$$\tilde{W}_{t\,x} = -\frac{|W_t|}{\pi} J_x(v_x^*, v_y^*) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9\mathrm{c}),$$

$$\tilde{W}_{t\,y} = -\frac{|W_t|}{\pi} J_y(v_x^*, v_y^*) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10\mathrm{c}).$$

Die Funktionen $J_x$ und $J_y$ sollen nun versuchsweise nach Potenzreihen entwickelt werden, die nach den linearen Gliedern abgebrochen werden sollen:

$$J_x(v_x^*, v_y^*) = J_x(0{,}0) + v_x^* \frac{\partial J_x(0{,}0)}{\partial v_x^*} + v_y^* \frac{\partial J_x(0{,}0)}{\partial v_y^*} + \ldots \ldots \quad (9\mathrm{d}),$$

$$J_y(v_x^*, v_y^*) = J_y(0{,}0) + v_x^* \frac{\partial J_y(0{,}0)}{\partial v_x^*} + v_y^* \frac{\partial J_y(0{,}0)}{\partial v_y^*} + \ldots \ldots \quad (10\mathrm{d}).$$

Man erhält also aus (9b) und (9c):

$$J_x(0{,}0) = \lim_{\substack{v_x^* \to 0 \\ v_y^* \to 0}} \int_0^{\pi} \frac{(v_x^* - \cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi}{+\sqrt{(v_x^* - \cos\varphi)^2 + v_y^{*2}}} = \lim_{v_x^* \to 0} \int_0^{\pi} \frac{v_x^* - \cos\varphi}{|v_x^* - \cos\varphi|}\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Es ist demnach:

$$J_x(0{,}0) = \lim_{v_x^* \to 0} (\pi - 2 \arccos v_x^*) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (12).$$

Ferner ist:

$$\frac{\partial J_x(v_x^*, v_y^*)}{\partial v_x^*} = \int_0^\pi \frac{v_y^{*2}\, d\varphi}{|[(v_x^* - \cos\varphi)^2 + v_y^{*2}]^{3/2}|},$$

daher

$$\frac{\partial J_x(0{,}0)}{\partial v_x^*} = \lim_{\substack{v_x^* \to 0\\ v_y^* \to 0}} \int_0^\pi \frac{v_y^{*2} \cdot d\varphi}{|[(v_x^* - \cos\varphi)^2 + v_y^{*2}]^{3/2}|} = \lim_{v_y^* \to 0} \int_0^\pi \frac{v_y^{*2}\, d\varphi}{|(v_y^{*2} + \cos^2\varphi)^{3/2}|}.$$

Dies läßt sich umformen zu:

$$\lim_{v_y^* \to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{|(1 + v_y^{*2})^{3/2}|} \cdot \frac{v_y^*\, d\varphi}{\left|\left(1 - \frac{\sin^2\varphi}{1 + v_y^{*2}}\right)^{3/2}\right|}.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{1}{1 + v_y^{*2}} = k^2 \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

und

$$1 - k^2 = k'^2 \quad \ldots \ldots \quad (13\text{a}),$$

so gilt für kleine $v_y^*$: $k^2 = 1 - v_y^{*2}$, daher:

$$k'^2 = v_y^{*2} \quad \ldots \ldots \quad (13\text{b}),$$

Es folgt also:

$$\frac{\partial J_x(0{,}0)}{\partial v_x^*} = \lim_{v_y^* \to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 k'^2 \cdot d\varphi}{|(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{3/2}|}.$$

Setzt man zur Abkürzung[4]):

$$\underset{+}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \Delta \quad \ldots \ldots \quad (14),$$

so ist also: $\frac{\partial J_x(0{,}0)}{\partial v_x^*} = \lim_{k' \to 0} 2 k'^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta^3}$. Wird $\Delta$ nach $k'$ entwickelt, so folgt nach Ausführung der Integration:

$$\frac{\partial J_x(0{,}0)}{\partial v_x^*} = \lim_{k' \to 0} \left\{ 2 k'^2 \left[ \frac{E}{k'^2} - \frac{k^2}{k'^2} \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\Delta} \right] \Bigg|_0^{\pi/2} \right\},$$

mit der Abkürzung:

$$E = 1 + \frac{1}{2}\left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{1}{2}\right) k'^2 + \quad \ldots \ldots \quad (15).$$

Es ist also:

$$\frac{\partial J_x(0{,}0)}{\partial v_x^*} = \lim_{k' \to 0} 2 k'^2 \left[ \frac{1}{k'^2} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{k'} - \frac{1}{2}\right) + \cdots \right] = 2 \quad \ldots \ldots \quad (16).$$

Das dritte Glied von (9d) ist nach (9b) und (9c) definiert durch:

$$\frac{\partial J_x(0{,}0)}{\partial v_y^*} = \lim_{\substack{v_x^* \to 0\\ v_y^* \to 0}} \frac{\partial}{\partial v_y^*} \int_0^\pi \frac{v_x^* - \cos\varphi}{\underset{+}{\sqrt{(v_x^* - \cos\varphi)^2 + v_y^{*2}}}}\, d\varphi = \lim_{\substack{v_x^* \to 0\\ v_y^* \to 0}} \int_0^\pi \frac{-v_y^*(v_x^* - \cos\varphi)\, d\varphi}{|[(v_x^* - \cos\varphi)^2 + v_y^{*2}]^{3/2}|}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial J_x(0{,}0)}{\partial v_y^*} = \lim_{v_y^* \to 0} \int_0^\pi \frac{-v_y^* \cos\varphi \cdot d\varphi}{|(\cos^2\varphi + v_y^{*2})^{3/2}|} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (17).$$

[4]) Vgl. Jahnke-Emde: Funktionentafeln, 2. Aufl., S. 124 ff., Leipzig 1933.

Das erste Glied von (10d) ergibt sich aus (10c) und (10b) zu:

$$J_y(0,0) = \lim_{\substack{v_x^* \to 0 \\ v_y^* \to 0}} \int_0^{\pi} \frac{v_y^* \, d\varphi}{+\sqrt{(v_x^* - \cos\varphi)^2 + v_y^{*2}}} = \lim_{v_y^* \to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 v_y^* \, d\varphi}{+\sqrt{\cos^2\varphi + v_y^{*2}}},$$

oder:

$$J_y(0,0) = \lim_{v_y^* \to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{+\sqrt{1 + v_y^{*2}}} \cdot \frac{d\varphi}{+\sqrt{1 - \frac{\sin^2\varphi}{1 + v_y^{*2}}}}.$$

Setzt man[4]):

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{+\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \ln\frac{4}{k'} + \frac{\ln\frac{4}{k'} - 1}{4} k'^2 + \cdots \quad (18),$$

wobei $k$ und $k'$ durch (13), (13a) und (13b) gegeben sind, so erhält man:

$$J_y(0,0) = \lim_{k' \to 0} 2k' \left[\ln\frac{4}{k'} + \frac{\ln\frac{4}{k'} - 1}{4} k'^2 + \cdots\right] = 0 \quad (19).$$

Das zweite Glied von (10d) folgt aus (10c) und (10b) zu:

$$\frac{\partial J_y(0,0)}{\partial v_y^*} = \lim_{\substack{v_x^* \to 0 \\ v_y^* \to 0}} \frac{\partial}{\partial v_y^*} \int_0^{\pi} \frac{v_y^* \, d\varphi}{+\sqrt{(v_x^* - \cos\varphi)^2 + v_y^{*2}}} = \lim_{\substack{v_x^* \to 0 \\ v_y^* \to 0}} \int_0^{\pi} \frac{(v_x^* - \cos\varphi)^2 \, d\varphi}{|[(v_x^* - \cos\varphi)^2 + v_y^{*2}]^{3/2}|},$$

daher ist: $\frac{\partial J_y(0,0)}{\partial v_y^*} = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{|\cos\varphi|}$. Dieses Integral existiert nicht zufolge der Singularität des Integranden für $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Die Funktion $J_y(v_x^*, v_y^*)$ ist also für kleine $v_x^*$ und $v_y^*$ in erster Näherung von $v_x^*$ unabhängig, verhält sich aber für $v_y^* = 0$ nicht regulär. Sie besitzt, wie man aus obigem, nicht konvergenten Integral ersieht, an der Stelle $v_y^* = 0$ eine logarithmische Singularität. Es muß also der Ansatz gelten:

$$J_y(v_x^*, v_y^*) = a \cdot v_y^* \cdot \ln|v_y^*| + \text{höhere Glieder} \quad (20)$$

mit noch zu bestimmendem $a$. Aus (20), (10b) und (10c) folgt:

$$\frac{\partial J_y(0,0)}{\partial v_y^*} = \lim_{v_y^* \to 0} [a(\ln|v_y^*| + 1)] = \lim_{\substack{v_x^* \to 0 \\ v_y^* \to 0}} \frac{\partial}{\partial v_y^*} \int_0^{\pi} \frac{v_y^* \, d\varphi}{+\sqrt{(v_x^* - \cos\varphi)^2 + v_y^{*2}}}.$$

Daraus ergibt sich für $a$ der Wert:

$$a = \lim_{\substack{v_x^* \to 0 \\ v_y^* \to 0}} \int_0^{\pi} \frac{(v_x^* - \cos\varphi)^2 \cdot d\varphi}{(1 + \ln|v_y^*|)\,|[(v_x^* - \cos\varphi)^2 + v_y^{*2}]^{3/2}|},$$

oder, nach einfacher Umformung:

$$a = \lim_{v_y^* \to 0} \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\varphi \cdot d\varphi}{(1 + \ln|v_y^*|) \cdot |(1 + v_y^{*2})^{3/2}| \cdot \left|\left(1 - \frac{\sin^2\varphi}{1 + v_y^{*2}}\right)^{3/2}\right|}.$$

Nach (13), (13a) und (13b) wird daraus:

$$a = \lim_{\substack{k' \to 0 \\ k \to 1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi \, d\varphi}{(1 + \ln|k'|) \cdot |(1 + k'^2)^{3/2}| \cdot |(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{3/2}|}.$$

Mit der Abkürzung (14) erhält man:

$$a = \lim_{k' \to 0} \frac{2}{(1 + \ln|k'|) \cdot |(1 + k'^2)|^{3/2}} \cdot \lim_{k \to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi \cdot d\varphi}{\Delta^3} \quad \ldots \ldots \quad (21).$$

Nun ist[4]:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi \, d\varphi}{\Delta^3} = \frac{K - E}{k^2} + \frac{2 \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta} \Big|_0^{\pi/2},$$

wobei $E$ und $K$ durch (15) und (18) gegeben sind.

Führt man dies in (21) ein, so erhält man bei Verwendung von (12a)

$$a = \lim_{k' \to 0} \frac{K - E}{(1 - k'^2)(1 + \ln|k'|) \cdot |(1 + k'^2)^{3/2}|},$$

oder mit Benutzung von (15) und (18):

$$a = -2 \quad \ldots \ldots \quad (22).$$

Man erhält also aus (9c), (9d), (12), (16) und (17):

$$\tilde{W}_{tx} = -\frac{2}{\pi} |W_t| \, v_x^* + \cdots \quad \ldots \ldots \quad (23).$$

Aus (20) und (22) folgt:

$$\tilde{W}_{ty} = +\frac{2}{\pi} |W_t| \cdot v_y^* \cdot \ln|v_y^*| + \cdots \quad \ldots \ldots \quad (24).$$

Aus (23) und (24) erkennt man, daß die Scheinreibung für kleine Körpergeschwindigkeiten in der $x$-Komponente nur von $v_x^*$, in der $y$-Komponente nur von $v_y^*$ abhängt. Die Gesetze dieser Abhängigkeit sind jedoch verschieden. Während Gl. (23) eine lineare Abhängigkeit darstellt und für kleine $v_x^*$ mit Gl. (7a) übereinstimmt, wo die Bewegung ausschließlich in der Schwingungsrichtung erfolgt, ist nach Gl. (24) die Abhängigkeit nicht mehr linear. Es ist zwar $\lim_{v_y^* \to 0} \tilde{W}_{ty} = 0$, d. h. die Reibung wird für beliebig kleine Geschwindigkeiten in der $y$-Richtung selbst beliebig klein. Doch das Anwachsen von $\tilde{W}_{ty}$ an der Stelle $v_y^* = 0$ ist unendlich groß, da $\lim_{v_y^* \to 0} \left|\frac{\partial \tilde{W}_{ty}}{\partial v_y^*}\right| = \frac{2}{\pi} |W_t| \lim_{v_y^* \to 0} |(1 + \ln|v_y|)| = \infty$. Immerhin ist es bedeutungsvoll, daß auch in der Richtung senkrecht zur Schwingbewegung die Scheinreibung mit gegen null gehender Querbewegung verschwindet, wenn dies auch nicht mit derselben Größenordnung geschieht, wie bei Bewegungen längs der Schwingungsrichtung.

Zuletzt sei darauf hingewiesen, daß die resultierende Scheinreibung der Geschwindigkeit des Körpers im allgemeinen nicht entgegengesetzt gerichtet ist, sondern schräg zu ihr liegt. Sind $\alpha$ und $\beta$ die Winkel der Körpergeschwindigkeit und der Scheinreibung gegen die $x$-Achse, so gilt:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y^*}{v_x^*} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\tilde{W}_{ty}}{\tilde{W}_{tx}}.$$

Daraus und aus (23) und (24) folgt aber: $\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{v_x^* \; v_y^* (\ln|v_y^*| - 1)}{v_x^{*2} + v_y^{*2} \ln|v_y^*|}$, das immer von null verschieden ist, wenn gleichzeitig $v_x^*$ und $v_y^*$ von null verschieden sind.

Die obigen Untersuchungen dürften vor allem bei der Lagerung von Kreiselgeräten praktische Bedeutung besitzen, da hierbei die der Theorie zugrunde liegenden Voraussetzungen gut erfüllt sind.

# Über eine Näherungslösung der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung.

(Ein Beitrag zur Theorie der Nachlaufsteuerungen und verwandter Geräte.)

Von *Hans Bückner* in Berlin.

*Für die Differentialgleichung $y + y' \cdot \lambda(x) = f(x)$ wird unter bestimmten Voraussetzungen über $\lambda$, insbesondere für kleine $\lambda$, eine Näherungslösung von der Form $u = f(x + \mu)$ angegeben, wobei $\mu$ eine ausschließlich von $\lambda$ abhängige Funktion bedeutet.*

## Einleitung.

Mehr und mehr gewinnen in der Technik Fern- und Nachlaufsteuerungen an Bedeutung. Verwandt mit ihnen sind Apparate, die zum selbsttätigen Abgleich von gewissen automatischen Recheneinrichtungen dienen. Die Mehrzahl dieser Geräte ist in ihrer Wirkung bestimmt durch eine inhomogene, gewöhnliche lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Dies sei am Beispiel einer Nachlaufsteuerung näher erläutert.

Wir nehmen an, daß der Zeiger eines Meßinstrumentes den Weg $f(t)$ als Funktion der Uhrzeit $t$ beschreibe. Verlangt werde, daß ein zweiter Zeiger, eine Welle oder dergleichen kraftgebend einen Weg $y(t)$ zurücklege, der dem Weg $f(t)$ möglichst proportional sein soll. Technisch wird diese Aufgabe zumeist dadurch gelöst, daß $y(t)$ als der Weg der Welle z. B. eines Elektromotors dargestellt wird, dessen Umlaufgeschwindigkeit einer ihm angelegten Steuerspannung proportional ist; die Steuerspannung wiederum wird der Differenz zwischen $y$ und $f$ verhältnisgleich gemacht. Demnach gilt

$$\lambda \cdot \dot{y}(t) = f(t) - y(t)$$

oder

$$y(t) + \lambda \cdot \dot{y}(t) = f(t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Hierin ist $\lambda$ eine durch die Dimensionierung der Nachlaufsteuerung gegebene positive Konstante.

Wie man sieht, ist es auf dem eingeschlagenen Wege grundsätzlich nicht möglich, eine strenge Proportionalität bzw. Gleichheit zwischen $f$ und $y$ herzustellen. Doch kann man diesem Ziel um so näherkommen, je kleiner $\lambda$, je steiler also die Steuercharakteristik des Motors gemacht wird. Daher begnügt man sich vielfach mit der Feststellung, daß $y(t)$ bis auf einen „Schleppfehler" mit $f(t)$ übereinstimme.

Ist $f(t) =$ konst. $t$, also zeitproportional, so ist auch $y(t)$, nachdem die Nachlaufsteuerung hinreichend lange in Betrieb ist, von einem Vorgang konstanter Änderungsgeschwindigkeit nicht mehr zu unterscheiden, und die Differenz $f - y$, der Schleppfehler, ist eine konstante Größe. Auf diesem Umstand beruht eine Untersuchungsmethode von Nachlaufsteuerungen. Man gibt eine gleichförmige Bewegung $f(t)$ in die Steuerung hinein und mißt dann den konstanten Schleppfehler; dies wird für verschiedene konstante Änderungsgeschwindigkeiten von $f(t)$ durchgeführt, und die Meßergebnisse geben einen gewissen Anhalt für das Verhalten der Steuerung auch im allgemeinen Falle.

Oftmals erscheint es aber notwendig, ganz unmittelbare und zugleich anschauliche Vorstellungen über den zeitlichen Verlauf von $y$ zu besitzen. Man könnte meinen, daß die exakte Lösung der Differentialgleichung (1), die bekanntlich durch Quadraturen lösbar ist, diese Forderung vollauf befriedigt. Dies ist aber nicht der Fall; die exakte Lösung hat namentlich für den Ingenieur den Nachteil, daß man ihr nicht ansehen kann, ob und wie sehr $f(t)$ als durch $y(t)$ näherungsweise wiedergegeben gelten kann.

Es ist daher das Ziel dieser Arbeit, für kleine Werte von $\lambda$ eine Näherungslösung der Gl. (1) aufzuzeigen, welche $y$ in einen einfach zu überblickenden Zusammenhang mit $f$ bringt. Diese Aufgabe soll aber nicht nur für die Differentialgleichung (1), sondern auch für den Fall behandelt werden, daß der Koeffizient $\lambda$ der Differentialgleichung eine variabele Zeitfunktion darstellt. Der Fall des variabelen Koeffizienten tritt bei dem vorstehend behandelten Beispiel dann auf, wenn die Erregung des Motors zeitlichen Änderungen unterliegt, wie das bekanntlich bei Netzanschluß der Fall ist.

Als Hauptergebnis dieser Arbeit (§ 2) wird sich herausstellen, daß man der Näherungslösung die Form

$$u = f(t + \mu) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

geben kann, wobei $\mu$ eine ausschließlich von $\lambda$ abhängige Funktion von $t$ ist und durch eine gewisse affine Transformation aus $\lambda$ entsteht. Neben der Untersuchung dieser Lösung und ihres Fehlers beschreibt die Arbeit noch eine weitere Näherungslösung sowie eine Verallgemeinerung der genannten Näherungslösung für den Fall $\lambda =$ konst. (§ 4).

Ein Nebenergebnis, das selbständiges Interesse verdienen könnte, wäre vielleicht in den Hilfssätzen des § 1 zu erblicken, welche sich ganz allgemein auf die Abschätzung des Fehlers einer Näherungslösung beziehen.

## § 1. Allgemeine Bemerkungen zum Fehler einer Näherungslösung.

Sämtliche Untersuchungen dieser Arbeit haben es ausschließlich mit reellen Größen zu tun.

Es seien $f(x)$ und $\lambda(x)$ zwei stetige Funktionen für $a \leq x \leq b$ $(a < b)$. Ferner sei $\lambda(x) \neq 0$. Dann besitzt die Differentialgleichung

$$y + \lambda(x) \cdot y' = f(x) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

für $a \leq x \leq b$ gewiß das allgemeine Integral

$$y(x; C, x_0) = E(x_0, x) \cdot \left(C + \int_{x_0}^{x} \frac{f(s)}{\lambda(s)} \cdot E(s, x_0) \cdot \mathrm{d}s\right) \quad \ldots \ldots (4).$$

Hier ist

$$E(x, x_0) = 1 / E(x_0, x) = e^{\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}s}{\lambda(s)}} > 0 \quad \ldots \ldots \ldots (5).$$

$C$ und $x_0$ sind Integrationskonstanten, wobei die letztere dem Intervall $< a, b >$ angehören muß. An sich ist eine dieser Konstanten überflüssig, doch ist es zweckmäßig, zunächst noch keine von ihnen festzulegen. Unter diesen Umständen besteht der folgende

Hilfssatz 1: Man kann mindestens ein partikuläres Integral $y$ der Differentialgleichung (3) finden, welches der Abschätzung

$$|y| \leq \Theta(a, b) \cdot \operatorname{Max} |f(x)| \;{}^{1)}, \qquad a \leq x \leq b$$

genügt. Hierin ist

$$\Theta(a, b) = \left| \frac{E(a, b) - 1}{E(a, b) + 1} \right| < 1 \;{}^{2)}.$$

Beweis: Es ist, wenn in (4) $C = 0$ gesetzt wird,

$$y(x; 0, x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{E(s, x) f(s) \cdot \mathrm{d}s}{\lambda(s)};$$

in dem auf der rechten Seite stehenden Integral ist $f(s)$ die einzige Funktion, die ihr Vorzeichen ändern kann. Daher besteht die Abschätzung

$$|y(x; 0, x_0)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} \frac{E(s, x)}{\lambda(s)} \cdot \mathrm{d}s \right| \cdot \operatorname*{Max}_{a \leq x \leq b} |f(x)| \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

zu Recht. Nun ist

$$\left| \int_{x_0}^{x} \frac{E(s, x)\,\mathrm{d}s}{\lambda(s)} \right| = |1 - E(x_0, x)| \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7).$$

Nunmehr verfügen wir über $x_0$ in der Weise, daß die Gleichung

$$1 - E(x_0, a) = -1 + E(x_0, b)$$

erfüllt wird; daraus folgt, indem diese Gleichung mit $E(a, x_0)$ multipliziert wird,

$$2 \cdot E(a, x_0) = 1 + E(a, b),$$

$$1 - E(x_0, a) = \frac{1 - E(b, a)}{1 + E(b, a)} = \frac{E(a, b) - 1}{E(a, b) + 1} \quad \ldots \ldots \ldots (8).$$

[1]) Offenbar existiert das Maximum wegen der Stetigkeit von $f(x)$.

[2]) Der Faktor $\Theta$ läßt sich im Falle $\lambda =$ konst., $f =$ konst. nicht verkleinern, ohne daß der Hilfssatz falsch wird.

Aus dieser Rechnung erkennt man auch, daß es eine Stelle $x_0$ der verlangten Art geben muß; denn einerseits verschwindet die linke Seite von (8) für $x_0 = a$, während sie für $x_0 = b$ das Vorzeichen der rechten Seite und einen größeren Betrag als diese annimmt, und andererseits ist die linke Seite der Gl. (8) eine in $x_0$ stetige Funktion. Da die Funktion $1 - E(x_0, x)$ in $x$ monoton ist, was ohne weiteres aus (5) folgt, so gilt unter Berücksichtigung von (8)

$$|1 - E(x_0, x)| \leq |1 - E(x_0, a)| = |1 - E(x_0, b)| = \left|\frac{E(a,b) - 1}{E(a,b) + 1}\right| = \Theta(a, b) \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Aus (6), (7) und (9) ergibt sich jetzt der Hilfssatz 1.

Es sei $u(x)$ eine für $a \leq x \leq b$ erklärte, stetige und stetig differenzierbare Funktion, die wir in die linke Seite von (3) einsetzen. Das gibt

$$u + \lambda(x)\, u' = g(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Wir setzen $z = y - u$ und ziehen (10) von (3) ab.

$$z + \lambda(x) \cdot z' = f(x) - g(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Das allgemeine Integral von (11) hat die Form

$$z = y(x; C, x_0) - u(x).$$

Wendet man nunmehr Hilfssatz 1 auf (11) an, so gewinnt man den

Hilfssatz 2: Man kann mindestens ein partikuläres Integral $y$ der Differentialgleichung (3) finden, dessen Differenz gegen eine vorgegebene stetige und stetig differenzierbare Funktion $u(x)$ der Abschätzung

$$|y - u| \leq \Theta(a, b) \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f - g| = \Theta(a, b) \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f - u - \lambda(x)\, u'|$$

genügt.

Die im Hilfssatz 2 vorkommende Funktion $f - u - \lambda \cdot u'$ bezeichnen wir im folgenden als das Defizit der Funktion $u(x)$ bezüglich der Differentialgleichung (3). Sie stellt den Rest dar, bis auf den die Differentialgleichung durch $u(x)$ befriedigt wird. Das Maximum des absoluten Betrages des eine stetige Funktion bildenden Defizits kürzen wir im folgenden ab mit

$$\Delta(u; a, b) = \operatorname{Max} |f - u - \lambda \cdot u'|, \qquad a \leq x \leq b.$$

Das Defizit einer Näherungslösung kann zur Abschätzung ihres Fehlers benutzt werden. Um dies darzulegen, schätzen wir die Differenz zwischen einem vorgegebenen partikulären Integral $y(x; C, x_0)$ und der als Ersatz für dieses Integral genommenen Näherungslösung $u(x)$ ab. Indem wir noch ein dem Hilfssatz 2 genügendes partikuläres Integral einführen und mit $y(x; C', x_0)$ bezeichnen, dürfen wir schreiben:

$$\left.\begin{aligned} y(x; C, x_0) - y(x; C', x_0) &= E(x_0, x) \cdot (C - C') \\ y(x; C, x_0) - u(x) &= y(x; C', x_0) - u(x) + E(x_0, x) \cdot (u(x_0) - C') + E(x_0, x) \cdot (C - u(x_0)) \\ |y(x; C, x_0) - u(x)| &\leq (1 + E(x_0, x)) \cdot \Delta(u; a, b) \cdot \Theta(a, b) + E(x_0, x) \cdot |y(x_0; C, x_0) - u(x_0)| \end{aligned}\right\} \quad (12).$$

Damit haben wir den

Hilfssatz 3 (Fehlersatz): Bedeutet $y(x)$ ein beliebiges partikuläres Integral der Differentialgleichung (3) und $u(x)$ eine als Ersatz dieses Integrals vorgesehene stetig differenzierbare Funktion, so gilt die Abschätzung

$$|y - u| \leq E(x_0, x) \cdot |y(x_0) - u(x_0)| + \Delta(u; a, b) \cdot \Theta(a, b) \cdot (1 + E(x_0, x)) \qquad a \leq x \leq b.$$

Hierin ist $x_0$ eine beliebige Stelle des Grundintervalls $< a, b >$ und $\Delta(u; a, b)$ das Maximum des absoluten Betrages des Defizits von $u(x)$ im Grundintervall.

Durch den Fehlersatz ist die Abschätzung des Fehlers $(y - u)$ der Näherungslösung auf die Abschätzung der Differenz $y - u$ an einer einzigen Stelle und auf die Berechnung oder Abschätzung von $\Delta(u; a, b)$ zurückgeführt. Die Abschätzung des Fehlersatzes läßt sich noch verschärfen. Wir setzen $\operatorname{Max}(x, x_0) = x_1$, $\operatorname{Min}(x, x_0) = x_2$. Dann gilt, was an sich ohne weiteres aus dem Hilfssatz 3 folgt,

$$|y(x) - u(x)| \leq E(x_0, x) \cdot |y(x_0) - u(x_0)| + \Delta(u; x_2, x_1) \cdot \Theta(x_2, x_1)\,(1 + E(x_0, x)) \quad . \quad . \quad (13).$$

Nun ist auf Grund von (8)

$$(1 + E(x_0, x)) \cdot \Theta(x_2, x_1) = (1 + E(x_0, x)) \cdot \left|\frac{1 - E(x_0, x)}{1 + E(x_0', x)}\right| = |1 - E(x_0, x)|.$$

Somit

$$|y(x) - u(x)| \leq E(x_0, x) \cdot |y(x_0) - u(x_0)| + |1 - E(x_0, x)| \cdot \Delta(u; x_2, x_1) \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Daß die Abschätzung (14) schärfer als die Abschätzung (12) ist, ergibt sich aus den Ungleichungen

$$\Delta(u; x_2, x_1) \leq \Delta(u; a, b) \quad \text{und} \quad \Theta(x_2, x_1) \leq \Theta(a, b),$$

die zu verifizieren es keiner besonderen Schritte bedarf.

Die praktische Bedeutung der Größe $\Delta(u; ..)$ erkennt man besonders auch aus folgenden Beispielen:

1. $\lambda(x) > 0$; $u(a) = y(a)$; $x_0 = a$. Die Abschätzung (14) liefert

$$|y - u| \leq \Delta(u; a, x) \cdot \left(1 - \exp\left(-\int_a^x \frac{d s}{\lambda(s)}\right)\right) < \Delta(u; a, x) \leq \Delta(u; a, b).$$

Stimmen also das partikuläre Integral und seine Näherung in den Anfangswerten überein, so liegt ihre Differenz dem Betrage nach unter $\Delta(u; a, b)$.

2. $f(x)$, $u(x)$, $\lambda(x)$ seien für $0 \leq x < \infty$ definiert; ferner sei $0 < \lambda \leq \Lambda =$ konst. Wir setzen $a = x_0 = 0$. Dann ist, ähnlich wie beim vorhergehenden Beispiel,

$$|y(x) - u(x)| \leq |y(0) - u(0)| \cdot E(0, x) + \Delta(u; 0, x).$$

Nun ist $E(0, x) = \exp\left(-\int_0^x \frac{d s}{\lambda(s)}\right) \leq e^{\frac{-x}{\Lambda}}$ und somit $E(0, x)$ eine mit wachsendem $x$ monoton gegen Null abnehmende Funktion, so daß es eine Stelle $x = x_1$ geben wird, von der ab der erste Summand auf der rechten Seite der Fehlerabschätzung praktisch gestrichen werden kann. Näherungsweise können wir also setzen

$$|y(x) - u(x)| \leq \Delta(u; 0, x), \qquad x \geq x_1.$$

Sollte $\Delta(u; 0, x) \equiv 0$, d. h. $u$ ein partikuläres Integral der Differentialgleichung (3) sein, so ist die letztere Abschätzung so aufzufassen, daß die Differenz $y - u$ von der Stelle $x_1$ ab praktisch annulliert werden kann. Dieses Beispiel trifft auf alle in der Einleitung genannten Geräte zu. Die Größe $x_1$ ist dabei als eine gewisse Anlaufzeit zu betrachten, nach deren Ablauf der Fehler der Näherungslösung der vorstehenden Ungleichung genügt.

3. Die Differentialgleichung (3) sei, wenn $f \equiv 0$ gesetzt wird, in übersichtlicher und anschaulicher Weise lösbar. Doch möge es wünschenswert sein, die als unübersichtlich angenommene exakte Lösung des inhomogenen Falles durch eine Näherungslösung zu ersetzen. Hier genügt es, als Näherungslösung eine einzige Funktion $u(x)$ zu finden, von der lediglich verlangt wird, daß sie schlechthin irgendein bestimmtes, aber nicht vorgegebenes, partikuläres Integral der Differentialgleichung (3) ersetzt.

In diesem Falle kann man zur Fehlerabschätzung auf den Hilfssatz 2 zurückgreifen, und man erkennt, daß die Größe $\Delta(u; a, b)$ eine obere Schranke für den Fehler bildet.

Der Fehlersatz und die vorstehenden Beispiele 1 bis 3 lassen es nunmehr gerechtfertigt erscheinen, bei den angekündigten Näherungslösungen die Fehleruntersuchung auf eine Betrachtung des Defizits zu beschränken.

## § 2. Die Näherungslösung und ihr Defizit.

1. Es sei $\lambda(x)$ der im Grundintervall $< a, b >$ als stetige Funktion definierte Koeffizient der Differentialgleichung (3).

Wir ordnen jetzt der Funktion $\lambda(x)$ eine Funktion $\mu(x)$ zu, die der Gleichung

$$H(x, \mu) = \lambda(x + \mu) + \mu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

genügen soll. Diese Gleichung läßt sich nur für solche Wertepaare $(x, \mu)$ erfüllen, für welche die Zahl $z = x + \mu$ dem Grundintervall angehört. Man gewinnt eine Parameterdarstellung sämtlicher Lösungen $(\mu, x)$, indem man setzt

$$\left.\begin{aligned} \mu &= -\lambda(z) \\ x &= z - \mu = z + \lambda(z) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

und $z$ das Grundintervall durchlaufen läßt. Durch die stetige Transformation $x = z + \lambda(z)$ wird das Intervall $< a, b >$ auf ein Intervall $\alpha \leq x \leq \beta$ abgebildet, so daß also die durch (15) definierte Funktion $\mu(x)$ für alle Stellen des Intervalls $< \alpha, \beta >$ und nur für diese erklärt ist. Indes muß $\mu(x)$ nicht notwendig eindeutig sein. Die Eindeutigkeit ist aber dann gesichert,

wenn die Intervalle $< a, b >$ und $< \alpha, \beta >$ eineindeutig vermöge der Transformation $x = z + \lambda(z)$ aufeinander abgebildet werden. Dies letztere ist bekanntlich der Fall, wenn $\lambda(z)$ stetig differenzierbar und $\frac{dx}{dz} \neq 0$ ist.

Von nun ab setzen wir die stetige Differenzierbarkeit von $\lambda$ sowie das Bestehen der Ungleichung

$$\lambda'(z) \neq -1$$

voraus, wodurch die Eindeutigkeit von $\mu(x)$ gesichert ist. Mit dieser Voraussetzung wird jetzt auch die in $x$ und $\mu$ stetige Funktion $H(x, \mu)$ nach jeder der beiden Variabelen stetig differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = \lambda'(x + \mu) + 1 \neq 0,$$

wenn $x + \mu = z$ im Grundintervall liegt. Nunmehr liefert der bekannte Satz über implizite Funktionen das Ergebnis, daß die Funktion $\mu(x)$ in ihrem Definitionsintervall $< \alpha, \beta >$ als Lösung der Gl. (15) sowohl stetig, wie auch stetig differenzierbar ist. Wir haben

$$\lambda'(x + \mu) \cdot (1 + \mu'(x)) + \mu'(x) = 0$$

oder

$$\mu'(x) = -\frac{\lambda'(z)}{1 + \lambda'(z)} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (17),$$

insbesondere also gilt

$$\mu'(x) \neq -1 \quad \dots \dots \dots \dots \quad (17').$$

Ist die Funktion $\lambda(z)$ zweimal stetig differenzierbar, so trifft dies auch für $\mu(x)$ zu, und es ist

$$\mu''(x) = -\frac{\lambda''(z)}{(1 + \lambda'(z))^3} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (18).$$

Aus der Parameterdarstellung (16) ergibt sich die zu (15) analoge Gleichung

$$\mu(z + \lambda(z)) + \lambda(z) = 0 \quad \dots \dots \dots \dots \quad (19),$$

welche wegen (17') nach $\lambda$ eindeutig im Intervall $< a, b >$ auflösbar ist. Zwischen $\lambda$ und $\mu$ besteht also eine gewisse Reziprozität. Man gewinnt $\mu$ aus $\lambda$ nach dem gleichen Verfahren, welches $\lambda$ aus $\mu$ ableitet.

Die die Reziprozität begründende Darstellung (16) läßt erkennen, daß nicht nur durch $x = z + \lambda(z)$, sondern auch durch $z = x + \mu(x)$ dieselbe eineindeutige Abbildung der Intervalle $< a, b >$ und $< \alpha, \beta >$ aufeinander hergestellt wird.

Die Endpunkte des Intervalls $< \alpha, \beta >$ werden von den beiden Zahlen $a + \lambda(a)$ und $b + \lambda(b)$ gebildet. Welche dieser beiden Zahlen den Punkt $\alpha$ und welche den Punkt $\beta$ liefert, hängt von dem Vorzeichen von $1 + \lambda'(z)$ ab. Ist $1 + \lambda'(z) > 0$, also $\lambda' > -1$, so bestehen die Entsprechungen

$$\alpha = a + \lambda(a); \qquad \beta = b + \lambda(b);$$

denn die die Abbildung zwischen den Intervallen $< a, b >$ und $< \alpha, \beta >$ vermittelnde Funktion $x = z + \lambda(z)$ nimmt mit wachsendem Argument monoton zu. Nimmt sie dagegen monoton ab, also $\lambda' < -1$, so vertauschen sich die Entsprechungen.

Wir setzen von jetzt ab noch $\lambda(x) \neq 0$ voraus. Dann können die Intervalle $< a, b >$ und $< \alpha, \beta >$ keinen gemeinsamen inneren Punkt besitzen, wenn $\lambda'(x) < -1$ ist. In der Tat würden aus der Existenz eines solchen Punktes die einander widersprechenden Ungleichungen

$$a < \beta, \qquad \alpha < b$$

oder

$$a < \lambda(a) + a; \quad b + \lambda(b) < b,$$

oder

$$\lambda(a) > 0, \qquad \lambda(b) < 0$$

hervorgehen.

Damit also die beiden Intervalle $< a, b >$ und $< \alpha, \beta >$ mehrere gemeinsame Punkte haben, muß die Bedingung $\lambda'(x) > -1$ notwendig erfüllt sein. Um eine hinreichende Bedingung zu finden, nehmen wir, um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, $\lambda(x)$ als positiv an. Dann muß sein

$$a < \alpha < b < \beta \quad \dots \dots \dots \dots \quad (20),$$

und hieraus folgt

$$\alpha = a + \lambda(a) < b \quad \dots \dots \dots \dots \quad (21).$$

Die Bedingung (21) ist also notwendig für die Existenz eines gemeinsamen Teilintervalles von $< a, b >$ und $< \alpha, \beta >$. Sie ist aber auch hinreichend, und man erkennt, daß das nicht

nur aus einem Punkt bestehende Intervall $< \alpha = a + \lambda(a),\ b >$ sämtliche Stellen enthält, an denen $\lambda(x)$ und $\mu(x)$ gemeinsam definiert sind.

Im Falle $\lambda < 0$ tritt an die Stelle von (21) die Bedingung

$$a < \beta = b + \lambda(b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21')$$

dafür, daß die Intervalle $< a, b >$ und $< \alpha, \beta >$ ein gemeinsames Teilintervall enthalten.

Der Definition von $\mu$ nach (15) liegt ein einfacher geometrischer Sachverhalt zugrunde, der an Hand von Bild 1 erläutert sei. Hierin stellen $X$ und $Y$ die Achsen eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems dar, in welchem die Kurve $\mathfrak{C}$ mit den Endpunkten $Q_1$ und $Q_2$ die Funktion $Y = \lambda(X)$ wiedergibt. Legt man nun durch den Punkt $X = x$ der Abszisse die Gerade $\mathfrak{G}(x)$ mit der Gleichung

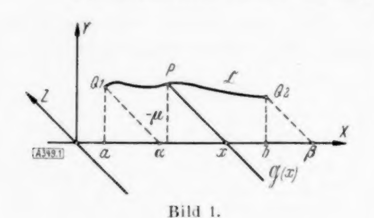



Bild 1.

$$Y = -X + x,$$

so ist die Frage nach der eindeutigen Lösbarkeit von (15) mit der anderen äquivalent, ob und wann $\mathfrak{G}(x)$ einen und nur einen Schnittpunkt mit $\mathfrak{C}$ hat; denn einem Lösungselement $(\mu, x)$ von (15) können wir einen Punkt $P$ mit den Koordinaten

$$Y = -\mu, \quad X = x + \mu$$

eineindeutig zuordnen, wobei $P$ sowohl auf $\mathfrak{G}(x)$ als auch auf $\mathfrak{C}$ liegt. Somit stellt $\mu(x)$, soweit eine solche Lösung eindeutig vorhanden ist, die negative Ordinate des Schnittpunktes von $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{G}$ dar. — Nach einer anderen Interpretation ist $\mu(x)$ dem Abschnitt von $\mathfrak{G}$ proportional, der von der $X$-Achse und von $\mathfrak{C}$ aus dieser Geraden herausgeschnitten wird. Wählt man daher ein affines Koordinatensystem $X$, $Z$, welches von der $X$-Achse einerseits und der Geraden $\mathfrak{G}(0)$ als $Z$-Achse andererseits gebildet wird, so ist die Gleichung der Kurve $\mathfrak{C}$ bis auf einen konstanten Faktor $Z = \mu(X)$. Somit entsteht $\mu$ aus $\lambda$ durch eine affine Transformation.

Die Funktionen $\lambda(x)$ und $\mu(x)$ sollen wegen der zwischen ihnen bestehenden Reziprozität als miteinander gekoppelte oder als Koppelfunktionen bezeichnet werden. Ihre wichtigsten Eigenschaften, wie sie sich aus vorstehendem ergeben, fassen wir zusammen in dem

Kopplungssatz:

Es sei $\lambda(z)$ eine im Intervall $a \leq z \leq b$ $(a < b)$ zweimal stetig differenzierbare Funktion. Ferner sei $\lambda'(z) \neq -1$. Dann ist die Gleichung

$$\lambda(x + \mu) + \mu = 0$$

in einem Intervall $\alpha \leq x \leq \beta$ eindeutig nach $\mu$ auflösbar. Die Intervalle $a \leq z \leq b$ und $\alpha \leq x \leq \beta$ werden durch die Transformationen $x = z + \lambda(z)$ und $z = x + \mu(x)$ eineindeutig aufeinander abgebildet. Es ist $\mu(x)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, es gilt $\mu'(x) \neq -1$ und es besteht die zur Definitionsgleichung von $\mu$ analoge Relation

$$\mu(z + \lambda) + \lambda = 0,$$

welche in $a \leq z \leq b$ eindeutig nach $\lambda$ auflösbar ist. Unter der Voraussetzung $\lambda > 0, a + \lambda(a) < b$ sind die Koppelfunktionen im Intervall $< \alpha = a + \lambda(a), b >$, unter der Annahme $\lambda < 0, a < b + \lambda(b)$ im Intervall $< a, b + \lambda(b) >$ zugleich definiert.

2. Unter allen Voraussetzungen des Kopplungssatzes ist

$$u(x) = f(x + \mu) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

eine für $\alpha \leq x \leq \beta$ definierte stetige Funktion. Sie ist die angekündigte Näherungslösung. Da jedoch eine Näherungslösung nur insoweit von Interesse ist, als sie auch im Grundintervall oder einem Teil davon erklärt ist, beschränken wir die Variabele $x$ der Funktion $u(x)$ auf den gemeinsamen Teil $< a_1, b_1 >$ der Intervalle $< a, b >$ und $< \alpha, \beta >$. Wie dieser Teil im einzelnen gelegen ist, steht im Kopplungssatz. Für $a_1 \leq x \leq b_1$ ist auch $u(x + \lambda(x))$ definiert, denn es gehört $x + \lambda(x)$ dem Intervall $< \alpha, \beta >$ an. Das gleiche gilt auch für $u(x + \vartheta \cdot \lambda)$, $0 \leq \vartheta \leq 1$. Dies vorausgeschickt, schätzen wir jetzt $\Delta(u; a_1, b_1)$ ab unter der Voraussetzung, daß $f$ zweimal stetig differenzierbar sei. Dann ist auch $u(x)$ zweimal stetig differenzierbar, und wir haben

$$u(x + \lambda(x)) = u(x) + \lambda(x) \cdot u'(x) + \frac{\lambda^2(x)}{2} \cdot u''(x + \vartheta \cdot \lambda), \quad 0 \leq \vartheta \leq 1.$$

Ferner ist wegen (19)

$$u\,(x + \lambda\,(x)) = f\,[x + \lambda + \mu\,(x + \lambda)] = f\,(x)\,,$$

somit

$$u\,(x) + \lambda \cdot u'\,(x) - f\,(x) = -\frac{\lambda^2\,(x)}{2}\,u''\,(x + \vartheta\,\lambda) \quad \ldots \ldots \quad (23),$$

$$\Delta\,(u\,;\,a_1\,,\,b_1) \leq \frac{1}{2} \cdot \underset{a_1 \leq x \leq b_1}{\text{Max}}\ \lambda^2\,(x) \cdot \underset{\alpha \leq x \leq \beta}{\text{Max}}\ |u''\,(x)| \quad \ldots \ldots \quad (24).$$

Weiter gilt wegen (17) und (18)

$$u''\,(x) = f''\,(x + \mu) \cdot (1 + \mu')^2 + f'\,(x + \mu) \cdot \mu'' = \frac{f''\,(z) \cdot (1 + \lambda'\,(z)) - f'\,(z) \cdot \lambda''\,(z)}{(1 + \lambda'\,(z))^3}\,,$$

$$\Delta\,(u\,;\,a_1\,,\,b_1) \leq \frac{1}{2} \cdot \underset{a_1 \leq x \leq b_1}{\text{Max}}\ \lambda^2\,(x) \cdot \underset{a \leq x \leq b}{\text{Max}} \left| \frac{f'' \cdot (1 + \lambda') - f' \cdot \lambda''}{(1 + \lambda')^3} \right| \quad \ldots \ldots \quad (25).$$

Für den Spezialfall $\lambda =$ konst. erhalten wir

$$\Delta\,(u\,;\,a_1\,,\,b_1) \leq \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \underset{a \leq x \leq b}{\text{Max}}\ |f''\,(x)| \quad \ldots \ldots \quad (26).$$

Somit ist in diesem Falle für kleine $|\lambda|$ der Fehler eine ganze Größenordnung kleiner als $|\lambda|$. Man wird aber in vielen Fällen erwarten dürfen, daß ähnlich günstige Verhältnisse auch bei variabelem $\lambda$ auftreten, da $\lambda$ mit seinem Quadrat in die Abschätzungen (24) und (25) eingeht. In § 4 wird ein Beispiel hierfür angegeben werden.

Die Näherungslösung $u = f(x + \mu)$ entsteht aus der Funktion $f(x)$ durch eine Verschiebung des Arguments $x$. In diesem Zusammenhang sei an den Spezialfall erinnert, daß die Funktion $f(x)$ bei konstantem $\lambda$ eine Sinusschwingung beschreibt. Bekanntlich existiert dann als partikuläres Integral der Differentialgleichung (1) wieder eine Sinusschwingung, die gegen die erste phasenverschoben ist. Um eine solche Phasenverschiebung handelt es sich auch bei unserer Näherungslösung, wenn man $x$ als die Phase auffaßt. Aus diesem Grunde trägt die folgende Aufstellung der wichtigsten Merkmale der Näherungslösung die Bezeichnung

Phasenverschiebungssatz (1. Art): Die im Intervall $< a, b >$ definierte Differentialgleichung $y + \lambda\,(x) \cdot y' = f(x)$ besitzt unter sämtlichen Voraussetzungen des Fehler- und des Kopplungssatzes die Näherungslösung

$$u\,(x) = f(x + \mu)\,,$$

worin $\mu$ die mit $\lambda$ gekoppelte Funktion bedeutet. Die Näherungslösung entsteht aus $f(x)$ durch eine Verschiebung der Phase $x$ um die Koppelfunktion $\mu(x)$. Im gemeinsamen Definitionsintervall $< a_1\,, b_1 >$ der Koppelfunktionen besteht die Abschätzung

$$\Delta\,(u\,;\,a_1\,,\,b_1) \leq \underset{a_1 \leq x \leq b_1}{\text{Max}}\ \frac{\lambda^2\,(x)}{2} \cdot \underset{\alpha \leq x \leq \beta}{\text{Max}}\ |u''\,(x)|\,,$$

wobei in $u''(x)$ die ersten beiden Ableitungen von $\lambda$ und $f$ eingehen, vorausgesetzt, das $f'$ und $f''$ stetig existieren.

Würden wir statt der Differentialgleichung (3) die neue Gleichung

$$y + \mu \cdot y' = f\,(x) \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

lösen wollen, so bekommt man auf analoge Weise die Näherungslösung

$$v = f\,(x + \lambda)\,,$$

und es gilt eine zu (24) und (25) analoge Fehlerabschätzung. Wir haben damit den

Satz der verbundenen Differentialgleichungen: Sind in den Differentialgleichungen

$$y + \lambda\,y' = f(x), \quad y + \mu \cdot y' = f(x)$$

die Funktionen $\lambda$ und $\mu$ miteinander gekoppelt und zugleich in einem gemeinsamen Intervall erklärt, so sind die Gleichungen in dem Sinne miteinander verbunden, daß $u = f(x + \mu)$ eine Näherungslösung der ersten, $v = f(x + \lambda)$ eine Näherungslösung der zweiten Differentialgleichung im gemeinsamen Definitionsintervall der Koppelfunktionen ist.

3. Die im Phasenverschiebungssatz angegebene Funktion $\mu$ ist nicht die einzige, mit der man das in der Einleitung gesteckte Ziel erreichen kann. Eine weitere Funktion dieser Art ergibt sich als Lösung der Differentialgleichung

$$\mu + \lambda \cdot \mu' = -\lambda \text{ [3]} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (28).$$

Ein Teil ihrer Lösungen läßt sich durch den Ansatz

$$\mu = -E(x_0, x) \cdot \int_{x_0}^{x} E(s, x_0)\, \mathrm{d}s, \quad a \leq x_0 \leq b \quad \ldots \ldots \ldots (29)$$

erfassen. Gemäß den dem Hilfssatz 1 vorausgegangenen Ableitungen kann man $x_0$ im Inneren des Grundintervalls so wählen, daß $\mu(x)$ seinem Betrage nach nicht größer als das Maximum von $|\lambda(x)|$ ist. Da $\mu(x)$ stetig ist und an der Stelle $x = x_0$ verschwindet, muß ferner ein Teilintervall $< a_1, b_1 >$ des Grundintervalls existieren, für welches $x + \mu(x)$ nur Werte aus dem Grundintervall annimmt. Somit ist dann $u = f(x + \mu)$ für $a_1 \leq x \leq b_1$ als Näherungslösung wohldefiniert. Für das Defizit erhält man

$$\begin{aligned} u + \lambda \cdot u' - f &= f(x+\mu) + \lambda \cdot (1 + \mu') \cdot f'(x+\mu) - f(x) \\ &= f(x+\mu) - \mu f'(x+\mu) - f(x) \\ &= -\frac{\mu^2}{2} \cdot f''(x + \vartheta_1 \cdot \mu), \quad 0 \leq \vartheta_1 \leq 1;\ a_1 \leq x \leq b_1. \end{aligned}$$

Somit

$$\mathrm{I}(u; a_1, b_1) \leq \frac{1}{2} \cdot \operatorname*{Max}_{a_1 \leq x \leq b_1} \lambda^2(x) \cdot \operatorname*{Max}_{a \leq x \leq b} |f''(x)| \quad \ldots \ldots \ldots (30).$$

Diese Abschätzung erscheint einfacher und besser als die Abschätzung (25). Indes besteht bei der zweiten Näherungslösung der Nachteil, daß $\mu$ gemäß (28) nicht so einfach bestimmt werden kann wie die zu $\lambda$ gekoppelte Funktion. Trotzdem ist aber die zweite Näherungslösung immer noch einfacher zu überblicken als die exakte Lösung der Differentialgleichung (3), da $\mu$ ausschließlich von $\lambda$ abhängt. Dieses Ergebnis fassen wir zusammen im

Phasenverschiebungssatz (2. Art): Die im Intervall $< a, b >$ definierte Differentialgleichung $y + \lambda \cdot y' = f(x)$ mit $f$ als zweimal stetig differenzierbarer und $\lambda$ als stetiger, von Null verschiedener Funktion besitzt die Näherungslösung $u = f(x + \mu)$, wobei $\mu$ durch die Differentialgleichung $\mu + \lambda \cdot \mu' = -\lambda$ definiert und so gewählt ist, daß sein Betrag das Maximum des Betrages von $\lambda$ nicht überschreitet, und daß ferner $u = f(x + \mu)$ in einem Teil $a_1 \leq x \leq b_1$ des Grundintervalls definiert ist. Es gilt

$$\mathrm{I}(u; a_1, b_1) \leq \operatorname*{Max}_{a_1 \leq x \leq b_1} \frac{\lambda^2(x)}{2} \cdot \operatorname*{Max}_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

Die Näherungslösung des vorstehenden Satzes ist unbestimmt, weil $\mu$ nur bis auf den Umstand festgelegt sein soll, daß sein Betrag das Maximum von $\lambda$ nicht überschreitet und daß $u(x)$ für einen gewissen Teil des Grundintervalls erklärt ist. Man wird deshalb $\mu$ von Fall zu Fall geeignet wählen müssen. Z. B. dürfte es zweckmäßig sein, im Falle $\lambda =$ konst. $\mu = -\lambda$ zu setzen. Dann nimmt die Näherungslösung die Form $u = f(x - \lambda)$ an. Sie entsteht aus der Funktion $f(x)$ durch eine konstante Verschiebung der Phase. Die von ihrem Defizit abgeleitete Größe wurde schon angegeben. Im übrigen liefert auch der Phasenverschiebungssatz 1. Art diese Lösung, und zwar nur diese.

## § 3. Beispiele.

1. Nachlaufsteuerung. Es bedeute $x$ die Zeit und $\lambda(x)$ eine positive Funktion von der Dimension einer Zeit. Somit ist $\mu(x)$ eine negative Funktion mit der Dimension einer Zeit. $|\mu(x)|$ entspricht einem vor dem Zeitpunkt $x$ angenommenen, also veralteten Wert von $\lambda$. Die Näherungslösung $u = f(x + \mu)$ gibt solche veralteten Werte von $f(x)$ wieder, die schon zur Zeit $x - |\mu|$ angenommen wurden. Somit wirkt die Nachlaufsteuerung, wenn ihr Verhalten durch die Näherung richtig beschrieben wird, im Sinne einer Verzögerung der ihr zugeführten Funktion. Je kleiner die Verzögerung, desto genauer die Nachlaufsteuerung. Ist $\lambda$ konstant, so auch die Verzögerung. Pendelt $\lambda$ in nicht zu großem Ausmaß sowie mit kleiner Geschwindigkeit und Beschleunigung um einen mittleren Wert, so gilt dies auch für die Verzögerung. Zur Diskussion des Fehlers werde ein praktisches Beispiel vorgelegt:

[3]) Auf diese Definition hat mich auch Herr M. Krafft besonders hingewiesen.

$$\lambda = \text{konst.} = 0{,}01 \text{ sec}, \quad 0 \le f(x) \le 6000 \text{ E(inheiten)},$$
$$|f'(x)| \le 160 \text{ E/sec}, \quad |f''(x)| \le 80 \text{ E/sec}^2.$$

Die Nachlaufsteuerung werde zur Zeit $a = -0{,}01$ sec in Betrieb genommen, so daß die Näherungslösung $u = f(x - 0{,}01)$ für $x \ge 0$ definiert ist. Wir benutzen nun die im 2. Beispiel des § 1 angegebene Fehlerabschätzung.

$$|y(x) - u(x)| \le |y(0) - u(0)| \cdot \mathrm{E}(0, x) + \varDelta(u; 0, x)$$
$$= |y(0) - u(0)| \cdot e^{-100 \cdot x} + \operatorname*{Max}_{a \le t \le x} \left| \lambda^2 \cdot \frac{f''(t)}{2} \right|,$$
$$|y(x) - u(x)| \le (6000 \cdot e^{-100 x} + 0{,}0001 . 40) \text{ Einheiten.}$$

Spätestens eine Sekunde nach Einschalten der Steuerung ist, grob gerechnet, der erste Summand der rechten Seite verschwindend klein gegenüber dem zweiten und der Fehler der Näherungslösung kleiner als 0,004 Einheiten.

2. Elektrischer Derivator. Wir behandeln die in Bild 2 beschriebene Kondensatorschaltung, bei welcher ein Kondensator und ein Widerstand in Reihe liegen. Liegt an der Schaltung die Spannung $g(t)$, so gilt für die am Widerstande liegende Spannung $V$ die Differentialgleichung $V + T \cdot \dot{V} = \dot{g} \cdot T$. Hier bedeutet $T = WC$ eine Zeitkonstante. Für $V$ ergibt sich näherungsweise $V \approx U = T \cdot \dot{g}(t - T)$. Für kleine $T$ mißt $V$ also den Differentialquotienten von $g$, aber nicht den aktuellen, sondern den um die Spanne $T$ veralteten. Die Schaltung ist als Derivator brauchbar. Die Fehlerabschätzung der Näherungslösung erfolgt wie beim 1. Beispiel. Zu beachten ist, daß $\ddot{g}(t)$ in die Abschätzung eingeht.

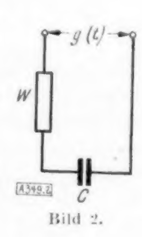


Bild 2.

3. Differentialgleichung mit variabelem Koeffizienten. Es sei von $y - y' \cdot \left(\frac{x}{2} - {}_{+}\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}\right) = x;\ x > 2$ näherungsweise irgendein partikuläres Integral zu finden. Es ist

$$\lambda = {}_{+}\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} - \frac{x}{2} = \frac{-1}{\frac{x}{2} + {}_{+}\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}} < 0; \quad x > 2.$$

Ferner

$$\lambda' = \frac{-\lambda}{2 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}} > 0; \quad x > 2,$$

also auch $\lambda' \neq -1$. Da ferner $\lambda$ zweimal stetig differenzierbar ist, sind somit alle Voraussetzungen für den Phasenverschiebungssatz 1. Art gegeben. Die Gleichung $\lambda(x + \mu) = -\mu$ ist für $x > 1$ eindeutig nach $\mu$ auflösbar. Es ist $\mu(x) = 1/x$. Damit erhalten wir für $x > 2$ die Näherungslösung $u = x + 1/x$. Zur Abschätzung von $\varDelta(u; ..)$ benutzen wir (24) aus § 2. Es ist

$$\varDelta(u; a_1, b_1) \le \frac{1}{2} \operatorname*{Max}_{a_1 \le x \le b_1} \lambda^2(x) \cdot \operatorname*{Max}_{a \le x \le \beta} |u''(x)|.$$

Es sei $a > 2$ und $b$ soviel größer als $a$, daß $a < b + \lambda(b)$ gilt (dies läßt sich wegen $\lim_{x \to \infty} \lambda(x) = 0$ bei hinreichend großem $b$ erreichen). Dann ist $a_1 = a$, $\alpha = a + \lambda(a)$. Wir haben dann

$$\varDelta(u; a, b_1) \le \frac{\lambda^2(a)}{(a + \lambda(a))^3} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2} + {}_{+}\sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}\right)^5}.$$

Für $a = 4$ ist $\varDelta(u; 4, b_1) \le 0{,}0014$; dabei hat $\lambda(4)$ den verhältnismäßig großen Wert $\lambda(4) = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}3$.

Wir vertauschen jetzt die Rollen von $\lambda$ und $\mu$ auf Grund des Satzes der verbundenen Differentialgleichungen. Also lautet die Gleichung $y + y'/x = x$, und die Näherungslösung ist $u = \frac{x}{2} + {}_{+}\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$. Auch hier erhält man $\varDelta(u; 4, b_1) \le 0{,}0014$.

## § 4. Verallgemeinerung der Näherungslösung für den Spezialfall $\lambda =$ konst.

Nimmt man in der Gleichung $y + \lambda \cdot y' = f(x)$ die Substitution

$$y = z \cdot e^{rx}, \quad \frac{1}{\lambda} \neq -r = \text{konst.} \qquad (31)$$

vor, so gewinnt man die neue Gleichung

$$z + \frac{\lambda}{1 + r\lambda} \cdot z' = \frac{f(x) \cdot e^{-rx}}{1 + r \cdot \lambda}.$$

Sie hat nach dem Phasenverschiebungssatz 1. Art die Näherungslösung

$$z = \frac{e^{\frac{r \cdot \lambda}{1 + r\lambda}}}{1 + r\lambda} \cdot e^{-rx} \cdot f\left(x - \frac{\lambda}{1 + r\lambda}\right).$$

Durch Umkehrung der Substitution (31) folgt daraus als Näherungslösung für die ursprüngliche Gleichung

$$u(x) = f\left(x - \frac{\lambda}{1 + r\lambda}\right) \cdot \frac{e^{\frac{r\lambda}{1 + r\lambda}}}{1 + r\lambda} \qquad (32).$$

Ist diese Näherungslösung im Teil $< a_1, b_1 >$ des Grundintervalls definiert und ist ferner die Funktion $f(x)$ zweimal stetig differenzierbar, so sind folgende Abschätzungen und Umformungen gestattet.

$$\Delta(u; a_1, b_1) = \underset{a_1 \le x \le b_1}{\text{Max}} \left| \frac{e^{\frac{r\lambda}{1 + r\lambda}}}{1 + r\lambda} \cdot \left(f\left(x - \frac{\lambda}{1 + r\lambda}\right) + \lambda \cdot f'\left(x - \frac{\lambda}{1 + r\lambda}\right)\right) - f(x) \right| \qquad (33).$$

Indem wir noch die Abkürzung

$$m = \frac{\lambda}{1 + r\lambda}$$

einführen, können wir (33) auf die Form bringen

$$\Delta(u; a_1, b_1) = \underset{a_1 \le x \le b_1}{\text{Max}} \left| e^{rm} \cdot (1 - rm) \cdot \left\{ f(x - m) + \frac{m}{1 - rm} \cdot f'(x - m) \right\} - f(x) \right| \qquad (34).$$

Hierbei kann man noch setzen

$$f(x) = f(x - m) + m \cdot f'(x - m) + \frac{m^2}{2} \cdot f''(x - \vartheta_1 m), \quad 0 \le \vartheta_1 \le 1,$$

$$e^{rm} = 1 + rm + r^2 \cdot m^2 \cdot e^{\vartheta_2 rm}/2, \quad 0 \le \vartheta_2 \le 1,$$

$$(1 - rm) \cdot e^{rm} - 1 = -r^2 \cdot m^2 \cdot \{1 + (rm - 1) \cdot e^{\vartheta_2 rm}/2\},$$

$$m \cdot e^{rm} - m = m^2 \cdot \{r + r^2 \cdot m \cdot e^{\vartheta_2 rm}/2\}.$$

Dann geht (34) über in

$$\Delta(u; a_1, b_1) = m^2 \cdot \underset{a_1 \le x \le b_1}{\text{Max}} \left| \begin{array}{l} f\ (x - m) \cdot r^2 \cdot \left(1 + \frac{rm - 1}{2} \cdot e^{rm \cdot \vartheta_2}\right) \\ + f'(x - m) \cdot -\left(r + m r^2 \cdot \frac{e^{rm\vartheta_2}}{2}\right) \\ + f''(x - \vartheta_1 m) \cdot \frac{1}{2} \end{array} \right|.$$

Verkleinert man $m$ seinem Betrage nach, so wächst das Intervall $< a_1, b_1 >$, in welchem die Näherungslösung zugleich auch für das Grundintervall definiert ist. Strebt $m$ gegen Null, so konvergiert $< a_1, b_1 >$ gegen $< a, b >$. Aus der vorstehenden Abschätzung folgt:

$$\overline{\lim_{m \to 0}} \frac{\Delta(u; a_1, b_1)}{m^2} \le \underset{a \le x \le b}{\text{Max}} \left| r^2 \cdot f(x)/2 - r f'(x) + f''(x)/2 \right|.$$

Die verallgemeinerte Lösung kann besser sein als die Lösung der Phasenverschiebungssätze. Man erkennt dies z. B. aus dem Spezialfall $f(x) = e^{rx}$, in welchem die verallgemeinerte Lösung auch ein partikuläres Integral der Differentialgleichung (3) im exakten Sinne ist. Durch passende Wahl der Konstanten $r$ hat man die Möglichkeit, den Fehler möglichst klein zu machen.

Im übrigen könnte man auch die verallgemeinerte Näherungslösung auf den Fall eines variabelen $\lambda$ übertragen. Doch dürfte dann eine zu komplizierte Form entstehen.

# Synthese ganzer rationaler Funktionen.

Von *H. Rosenhamer* in Västerås.

*Zur Abdämpfung von Übergangserscheinungen pflegt man Grenzfälle zu konstruieren, die einer verhältnismäßig einfachen mathematischen Behandlung zugänglich sind, worauf man die Beiwerte der vorgelegten Aufgabe derart abändert, daß der wirkliche Vorgang in ein Gebiet positiver Dämpfung hineingeschoben wird.*

*Man kann nun aber auch umgekehrt von einer erwünschten und dem vorgelegten Falle angepaßten Übergangsform ausgehen und dafür sorgen, daß die hierfür erforderlichen Bedingungen tatsächlich erfüllt werden. Bei stetiger Übergangsform setzt dieses Verfahren vor allem die Kenntnis des Bildungsgesetzes ganzer rationaler Funktionen bei gegebenen Realkomponenten der im allgemeinen komplexen Nullstellen voraus.*

Bei der Untersuchung stetig verlaufender Übergangserscheinungen gelingt es meist, die sich abspielenden Vorgänge durch eine lineare Differentialgleichung mit konstanten, reellen Beiwerten zu beschreiben, sei es, daß das zu untersuchende System von Hause aus linear ist, sei es, daß man die Untersuchung auf so kleine Störungen des Dauergleichgewichtes beschränken kann, daß sich die auftretenden Kräfte als lineare Funktionen dieser Störungen darstellen lassen („Methode der kleinen Schwingungen"). Das Integral einer solchen Differentialgleichung setzt sich additiv aus einem Dauergliede, verursacht durch die aufgeprägten Kräfte, und einer der Ordnung der Differentialgleichung entsprechenden Anzahl von zeitlichen Exponentialfunktionen als Übergangsgliedern zusammen. Soll sich ein den aufgeprägten Kräften entsprechender Dauerzustand einstellen, so müssen die Exponentialfunktionen abklingen, die Realteile der Exponenten also alle negativ sein. Da sich die Exponenten als Produkte aus der Zeit und den Wurzeln der der Differentialgleichung zugehörigen algebraischen Gleichung, der Hauptgleichung, berechnen, müssen demnach sämtliche reelle Wurzelkomponenten der Hauptgleichung negativ sein.

Ein allgemeines Kriterium, das stets ermöglicht für eine algebraische Gleichung beliebigen Grades anzugeben, ob deren sämtliche reelle Wurzelkomponenten negativ sind, hat Hurwitz auf Anregung durch Stodola ausgearbeitet[1]). Das Verfahren, welches man als „Methode der Dämpfungsprüfung" bezeichnen kann, läßt jedoch keine Schlüsse auf den Betrag der Wurzeln oder darauf zu, in welcher Richtung dieser bei einer Veränderung der Gleichungsbeiwerte beeinflußt wird.

Einen Schritt weiter führt die „Methode der Dämpfungserzeugung", als deren Vertreter die „Methode selbsterregter Schwingungen" genannt werde[2]). Sie ermittelt für einen geeignet herausgegriffenen Teil des gegebenen Systems die Kraft $\mathfrak{P}_1$, welche er zur Ausführung von ungedämpften Schwingungen benötigt; diese Schwingungen beeinflussen ihrerseits den restlichen Systemteil und veranlassen ihn zur Ausübung einer Kraft $\mathfrak{P}_2$ zurück auf den ersten Teil. Je nach der Seite, auf der man beim Durchlaufen der Kurve $\frac{\mathfrak{P}_2}{\mathfrak{P}_1}$ in der komplexen Ebene den Punkt $(1, j \cdot 0)$, der ja Gleichheit der beiden Kräfte und damit dem wirklichen Schwingungszustande des Gesamtsystems entspricht, liegen hat, arbeitet dieses gedämpft oder ungedämpft. Darüber hinaus läßt sich aus dem Aufbau von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ recht schön der Einfluß der verschiedenen Systemgrößen auf das Zustandekommen einer Dämpfung erkennen. Über den Betrag der Dämpfung gibt aber auch diese Methode keinen Aufschluß.

Was man letzten Endes wünscht, ist, eine unter Berücksichtigung der jeweils gegebenen Verhältnisse als am vorteilhaftesten erkannte Übergangsform genau vorschreiben zu können; mittels möglichst geringer Veränderungen an den Beiwerten der vorliegenden Differentialgleichung mit Hilfe von zusätzlichen Beiwerten, die ja im allgemeinen doch aufzuwendende Zusatzdämpfungsapparatur bedeuten, muß mit anderen Worten eine möglichst wirksame Dämpfung erzielt werden. Man wird allerdings nur in den seltensten Fällen eine viel kräftigere Dämpfung erzwingen, als sie durch die reziproke Zeitkonstante der größten Maschine des Systems gegeben ist, da die sonst für die Abdämpfung erforderliche Kraftreserve ein Vielfaches der für den Dauerbetrieb erforderlichen Kraft betragen würde; auch die Rücksicht auf die zulässigen Beanspruchungen, beispielsweise bei Spannungsregelung die Rücksicht auf Isolationsfestigkeit, zwingt zu dieser Begrenzung. Weiterhin ist es wenig vorteilhaft,

[1]) A. Hurwitz: Math. Ann. Bd. 46 (1895), S. 273; — A. Stodola: Schweiz. Bauztg. Bd. 22 (1893), S. 113; — W. Hort: Technische Schwingungslehre, Berlin 1922, S. 164.

[2]) A. Leonhard: Die selbsttätige Regelung in der Elektrotechnik, Berlin 1940, S. 59.

große Unterschiede in den Dämpfungsexponenten zuzulassen; deren Summe ist nämlich, wie später (erste der Gln. (8a)) ersichtlich wird, gegeben, und der Dauerzustand wird doch nicht eher erreicht, als bis das langsamste Übergangsglied verschwunden ist.

Bei dieser „Methode der Dämpfungswahl" liegt somit die Aufgabe vor, die Beiwerte

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_{n-1} \quad \ldots \quad (1)$$

einer ganzen rationalen Funktion $n$-ten Grades

$$g(x) \equiv a_0 + x \cdot a_1 + x^2 \cdot a_2 + \cdots + x^{n-1} \cdot a_{n-1} + x^n \quad \ldots \quad (2)$$

zu bestimmen, deren reelle Nullstellenkomponenten gegeben und insbesondere alle einander gleich sind, wobei zusätzlich die Bedingung zu erfüllen ist, daß alle Beiwerte reell sein müssen; bezüglich der imaginären Nullstellenkomponenten bestehen keine besonderen Wünsche.

Sind die Nullstellen der Funktion (2)

$$x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_n \quad \ldots \quad (3),$$

so kann (2) bekanntlich auch in der Form

$$g(x) \equiv (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \quad \ldots \quad (4)$$

geschrieben werden und Ausrechnung sowie Vergleich mit (2) gibt dann

$$\left.\begin{array}{l} -a_{n-1} = x_{\substack{n\\1}},\quad +a_{n-2} = x_{\substack{n\\2}},\quad -a_{n-3} = x_{\substack{n\\3}},\ \cdots \\ (-1)^\varkappa a_{n-\varkappa} = x_{\substack{n\\\varkappa}},\ \cdots\ (-1)^n a_0 = x_{\substack{n\\n}} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (5);$$

hierbei bezeichne das Symbol $x_{\substack{n\\\varkappa}}$ die Summe derjenigen Nullstellenprodukte, die durch die möglichen Kombinationen der $n$ Nullstellen zur $\varkappa$-ten Klasse ohne Wiederholung dargestellt werden, so daß die Indizes $\substack{n\\\varkappa}$ den Kombinationsanzahlen $\binom{n}{\varkappa}$ entsprechen. Es bezeichne also

$$\left.\begin{array}{l} x_{\substack{n\\1}} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ x_{\substack{n\\2}} = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_2 x_3 + x_2 x_4 + \cdots + x_{n-1} x_n \\ x_{\substack{n\\3}} = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \cdots + x_1 x_3 x_4 + x_1 x_3 x_5 + \cdots + x_{n-2} x_{n-1} x_n \\ \cdots \\ x_{\substack{n\\n}} = x_1 x_2 \cdots x_n \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (6).$$

Die Nullstellen sind im allgemeinen komplex und es sei

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = v_1 + j\,w_1 \\ x_2 = v_2 + j\,w_2 \\ \cdots \\ x_n = v_n + j\,w_n \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (7).$$

Setzt man (7) in (5) ein, so ergibt die Ausrechnung mit Hilfe des Schlusses von $n-1$ auf $n$ folgende zwei Gleichungsgruppen, von denen die erste durch Vergleich der reellen Glieder mit den Beiwerten der ganzen rationalen Funktion (2) entstanden ist, die zweite durch Nullsetzen der imaginären Glieder:

$$\left.\begin{array}{l} -a_{n-1} = v_{\substack{n\\1}} w_{\substack{n\\0}} \\ +a_{n-2} = v_{\substack{n\\2}} w_{\substack{n\\0}} - v_{\substack{n\\0}} w_{\substack{n\\2}} \\ -a_{n-3} = v_{\substack{n\\3}} w_{\substack{n\\0}} - v_{\substack{n\\1}} w_{\substack{n\\2}} \\ \cdots \\ (-1)^\varkappa a_{n-\varkappa} = v_{\substack{n\\\varkappa}} w_{\substack{n\\0}} - v_{\substack{n\\\varkappa-2}} w_{\substack{n\\2}} + v_{\substack{n\\\varkappa-4}} w_{\substack{n\\4}} - + \cdots \\ \cdots \\ (-1)^n a_0 \quad = v_{\substack{n\\n}} w_{\substack{n\\0}} - v_{\substack{n\\n-2}} w_{\substack{n\\2}} + v_{\substack{n\\n-4}} w_{\substack{n\\4}} - + \cdots \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (8a),$$

$$\left.\begin{aligned}
&\underset{0}{v_n}\,\underset{1}{w_n} &&= 0\\
&\underset{1}{v_n}\,\underset{1}{w_n} &&= 0\\
&\underset{2}{v_n}\,\underset{1}{w_n} - \underset{0}{v_n}\,\underset{3}{w_n} &&= 0\\
&\dots\\
&\underset{\varkappa-1}{v_n}\,\underset{1}{w_n} - \underset{\varkappa-3}{v_n}\,\underset{3}{w_n} + \underset{\varkappa-5}{v_n}\,\underset{5}{w_n} - + \cdots &&= 0\\
&\dots\\
&\underset{n-1}{v_n}\,\underset{1}{w_n} - \underset{n-3}{v_n}\,\underset{3}{w_n} + \underset{n-5}{v_n}\,\underset{5}{w_n} - + \cdots &&= 0
\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (8\text{b}).$$

Das Produkt $\underset{\varkappa-\lambda}{v_n}\,\underset{\lambda}{w_n}$ ist wiederum symbolisch zu verstehen und bedeutet die Summe aller hinsichtlich der Indizes wiederholungsfreien Produkte aus den möglichen Kombinationen von $n$ Elementen $v$ zur $(\varkappa-\lambda)$-ten Klasse mit den möglichen Kombinationen von $n$ Elementen $w$ zur $\lambda$-ten Klasse; insbesondere bedeutet hierbei

$$\left.\begin{aligned}
\underset{0}{v_n} &= \underset{0}{w_n} = 1\\
\underset{<0}{v_n} &= \underset{<0}{w_n} = 0
\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (9).$$

Die Anzahl der Summanden des Produktes $\underset{\varkappa-\lambda}{v_n}\,\underset{\lambda}{w_n}$ beträgt

$$\binom{n}{\varkappa-\lambda}\binom{n-(\varkappa-\lambda)}{\lambda} = \binom{n}{\lambda}\binom{n-\lambda}{\varkappa-\lambda}.$$

Einige einfache Beispiele mögen die Berechnung von $\underset{\varkappa-\lambda}{v_n}\,\underset{\lambda}{w_n}$ verdeutlichen:

$$\begin{aligned}
\underset{1}{v_3}\,\underset{0}{w_3} &= v_1 + v_2 + v_3\\
\underset{1}{v_3}\,\underset{2}{w_3} &= v_1 w_2 w_3 + v_2 w_3 w_1 + v_3 w_1 w_2\\
\underset{2}{v_3}\,\underset{1}{w_3} &= v_1 v_2 w_3 + v_1 v_3 w_2 + v_2 v_3 w_1\\
\underset{1}{v_4}\,\underset{2}{w_4} &= v_1 (w_2 w_3 + w_2 w_4 + w_3 w_4) + v_2 (w_1 w_3 + w_1 w_4 + w_3 w_4)\\
&\quad + v_3 (w_1 w_2 + w_1 w_4 + w_2 w_4) + v_4 (w_1 w_2 + w_1 w_3 + w_2 w_3)\\
\underset{2}{v_4}\,\underset{2}{w_4} &= v_1 v_2 w_3 w_4 + v_1 v_3 w_4 w_2 + v_1 v_4 w_2 w_3 + v_2 v_3 w_4 w_1 + v_2 v_4 w_1 w_3 + v_3 v_4 w_1 w_2.
\end{aligned}$$

Bisher ist unberücksichtigt geblieben, daß die komplexen Nullstellen stets konjugiert auftreten[3]). Beachtet man diesen Umstand, so läßt sich

$$w_2 = -w_1, \quad w_4 = -w_3, \quad \cdots \quad w_n = \begin{matrix} -w_{n-1} \\ 0 \end{matrix} \quad \dots\dots \quad (10)$$

schreiben, wobei für $w_n$ der obere oder der untere Wert zu wählen ist, je nachdem $n$ geradzahlig oder ungeradzahlig ist. Die in den Gln. (8a) auftretenden Produkte $\underset{\varkappa-\lambda}{v_n}\,\underset{\lambda}{w_n}$ bekommen damit folgendes Aussehen:

$$\left.\begin{aligned}
\underset{\varkappa}{v_n}\,\underset{0}{w_n} &= + \underset{\varkappa}{v_n}\\
\underset{\varkappa-2}{v_n}\,\underset{2}{w_n} &= - \underset{\varkappa-2}{v_{n-1,2}}\, w_1^2 - \underset{\varkappa-2}{v_{n-3,4}}\, w_3^2 - \cdots\\
&\quad + \underset{\varkappa-4}{v_{n-1,2,3,4}}\,(v_1 - v_2)(v_3 - v_4)\, w_1 w_3 + \underset{\varkappa-4}{v_{n-1,2,5,6}}\,(v_1 - v_2)(v_5 - v_6)\, w_1 w_5 + \cdots\\
\underset{\varkappa-4}{v_n}\,\underset{4}{w_n} &= + \underset{\varkappa-4}{v_{n-1,2,3,4}}\, w_1^2 w_3^2 + \underset{\varkappa-4}{v_{n-1,2,5,6}}\, w_1^2 w_5^2 + \cdots\\
&\quad - \underset{\varkappa-6}{v_{n-1,2,3,4,5,6}}\,(v_3 - v_4)(v_5 - v_6)\, w_1^2 w_3 w_5 -\\
&\dots
\end{aligned}\right\} \quad (11\text{a}).$$

[3]) Serret-Scheffers: Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, Bd. 1, Leipzig und Berlin 1924, S. 598.

Die Produkte $v_{\substack{n\\ \varkappa-\lambda}} w_{\substack{n\\ \lambda}}$ der Gln. (8b) werden dagegen:

$$\left.\begin{aligned}
v_{\substack{n\\ \varkappa-1}} w_{\substack{n\\ 1}} &= - v_{\substack{n-1,2\\ \varkappa-2}} (v_1 - v_2)\, w_1 - v_{\substack{n-3,4\\ \varkappa-2}} (v_3 - v_4)\, w_3 - \cdots \\
v_{\substack{n\\ \varkappa-3}} w_{\substack{n\\ 3}} &= + v_{\substack{n-1,2,3,4\\ \varkappa-4}} (v_1 - v_2)\, w_1 w_3^2 + \cdots \\
&\quad - v_{\substack{n-1,2,3,4,5,6\\ \varkappa-6}} (v_1 - v_2)(v_3 - v_4)(v_5 - v_6)\, w_1 w_3 w_5 - \cdots \\
v_{\substack{n\\ \varkappa-5}} w_{\substack{n\\ 5}} &= - v_{\substack{n-1,2,3,4,5,6\\ \varkappa-6}} (v_1 - v_2)\, w_1 w_3^2 w_5^2 - \\
&\ldots
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (11\,\mathrm{b}).$$

Die in den Gln. (11) vorkommenden Indizes $n-\alpha, \beta, \ldots$ sollen bedeuten, daß von den $n$ Elementen $1, 2, \ldots n$ die Elemente $\alpha, \beta, \ldots$ zu streichen sind; beispielsweise wird daher

$$\begin{aligned}
v_{\substack{6\\ 1}} w_{\substack{6\\ 2}} &= -(v_3 + v_4 + v_5 + v_6)\, w_1^2 - (v_1 + v_2 + v_5 + v_6)\, w_3^2 \\
&\quad - (v_1 + v_2 + v_3 + v_4)\, w_5^2 ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{\substack{6\\ 2}} w_{\substack{6\\ 2}} &= -(v_3 v_4 + v_3 v_5 + v_3 v_6 + v_4 v_5 + v_4 v_6 + v_5 v_6)\, w_1^2 \\
&\quad - (v_1 v_2 + v_1 v_5 + v_1 v_6 + v_2 v_5 + v_2 v_6 + v_5 v_6)\, w_3^2 \\
&\quad - (v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_1 v_4 + v_2 v_3 + v_2 v_4 + v_3 v_4)\, w_5^2 \\
&\quad + (v_1 - v_2)(v_3 - v_4)\, w_1 w_3 + (v_1 - v_2)(v_5 - v_6)\, w_1 w_5 \\
&\quad + (v_3 - v_4)(v_5 - v_6)\, w_3 w_5 .
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gln. (8) und (11) lassen sich die Beiwerte einer ganzen rationalen Funktion $n$-ten Grades aus den im allgemeinen voneinander verschieden reellen und den paarweise entgegengesetzt gleichen imaginären Nullstellenkomponenten berechnen unter der Bedingung, daß die Beiwerte reelle Zahlen sein sollen.

Eine bedeutende Vereinfachung ergibt sich, wenn man, wie oben angedeutet, alle reellen Nullstellenkomponenten gleich groß macht. Setzt man nämlich

$$v = v_1 = v_2 = \cdots = v_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

in das Gleichungssystem (11a) ein, so geht dieses über in

$$\left.\begin{aligned}
v_{\substack{n\\ \varkappa}} w_{\substack{n\\ 0}} &= + v^{\varkappa} \binom{n}{\varkappa} \\
v_{\substack{n\\ \varkappa-2}} w_{\substack{n\\ 2}} &= - v^{\varkappa-2}\, b_1 \binom{n-2}{\varkappa-2} \\
v_{\substack{n\\ \varkappa-4}} w_{\substack{n\\ 4}} &= + v^{\varkappa-4}\, b_2 \binom{n-4}{\varkappa-4} \\
&\ldots
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$\left.\begin{aligned}
b_1 &= w^2_{\substack{n\\ 1}} = w_1^2 + w_3^2 + \cdots + w_{n'-1}^2 \\
b_2 &= w^2_{\substack{n\\ 2}} = w_1^2 w_3^2 + w_1^2 w_5^2 + \cdots + w_3^2 w_5^2 + w_3^2 w_7^2 + \cdots + w_{n'-3}^2 w_{n'-1}^2 \\
&\ldots
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

mit $n' = n$ bzw. $n-1$ im Falle, daß $n$ geradzahlig bzw. ungeradzahlig ist. Das Gleichungssystem (11b) wird durch Einsetzen von (12) identisch Null, was bedeutet, daß die Beiwerte $a$ stets reelle Zahlen werden, wenn man alle reellen Nullstellenkomponenten gleich groß macht. Nunmehr berechnen sich die Beiwerte folgenderweise:

$$\left.\begin{aligned}
-a_{n-1} &= v\,n \\
+a_{n-2} &= v^2\binom{n}{2} + b_1 \\
-a_{n-3} &= v^3\binom{n}{3} + v\,b_1\binom{n-2}{1} \\
+a_{n-4} &= v^4\binom{n}{4} + v^2\,b_1\binom{n-2}{2} + b_2 \\
-a_{n-5} &= v_5\binom{n}{5} + v^3\,b_1\binom{n-2}{3} + v\,b_2\binom{n-4}{1} \\
&\dots \\
(-1)^{\varkappa}\,a_{n-\varkappa} &= v^{\varkappa}\binom{n}{\varkappa} + v^{\varkappa-2}\,b_1\binom{n-2}{\varkappa-2} + v^{\varkappa-4}\,b_2\binom{n-4}{\varkappa-4} + \\
&\dots
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Die reelle Komponente sämtlicher Nullstellen wird durch den Beiwert mit der höchsten Ordnungszahl bestimmt zu

$$v = -\frac{a_{n-1}}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16);$$

mit diesem Dämpfungsfaktor verschwinden also alle Übergangsglieder. Nach Wahl von $v$ können die Beiwerte $a$ gemäß (15) berechnet werden; die Werte $b$ kann man dabei beliebig wählen, wenn man nur die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$b_{1,2,\dots} > 0, \text{ reell} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17\text{a}),$$

$$w_{1,2,\dots} \quad \text{reell} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17\text{b}).$$

(17a) ist eine unmittelbare Folgerung aus (17b) und nur mit Hinblick auf die praktische Anwendung besonders erwähnt. Zur Erfüllung der Forderung (17b) ist die Kenntnis der Bestimmungsgleichungen für $w_{1,2,\dots}$ notwendig. Die Bestimmungsgleichung für $w^2_{1,3,\dots}$ kann aber sofort angeschrieben werden, wenn man beachtet, daß die $b_{1,2,\dots}$ nichts anderes als die Beiwerte einer ganzen rationalen Funktion mit den Nullstellen $w^2_{1,3,\dots}$ sind, wie ein formaler Vergleich von (14) und (5) zeigt:

$$b_{\frac{n'}{2}}(-1)^{\frac{n'}{2}} + w^2\,b_{\frac{n'}{2}-1}(-1)^{\frac{n'}{2}-1} + - \cdots + w^{n'-4}\,b_2 - w^{n'-2}\,b_1 + w^{n'} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (18\text{a}).$$

$w_{1,2,\dots}$ bestimmt sich dann aus

$$\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \end{matrix} = \pm\sqrt{w_1^2}\,, \qquad \begin{matrix} w_3 \\ w_4 \end{matrix} = \pm\sqrt{w_3^2}\,, \quad \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18\text{b}).$$

Hiermit sind alle Hilfsmittel gegeben, um die Beiwerte einer irgendwie zustande gekommenen Hauptgleichung durch geeignete Ergänzungen so gestalten zu können, daß eine wirksame Dämpfung erzielt wird. In der Natur der für die Beschaffung der Zusatzdämpfungsglieder zur Verfügung stehenden Anordnungen liegt es, daß eine solche gewöhnlich mehrere Beiwerte erfaßt; dennoch kann es vorkommen, daß die Reichweite einer Zusatzdämpfungseinheit den Forderungen nicht genügt und der Einsatz von zwei oder noch mehr Einheiten nötig wird. Regelungsanordnungen, die eine Beeinflussung des Beiwertes $a_{n-1}$, also des Dämpfungsexponenten gestatten, werden üblicherweise als Schnellregler bezeichnet. Eine Heranziehung des Beiwertes $a_0$ oder allgemeiner von Beiwerten, die auch als Faktoren von Dauergliedern auftreten, zu Dämpfungszwecken muß vermieden werden, da sonst geringe Abgleichungsfehler starke Störungen des Sollzustandes verursachen können.

An einem Zahlenbeispiel soll die Anwendung des Gesagten auf den Fall einer Funktion sechsten Grades gezeigt werden. Für die Übergangsdrehzahl habe sich bei einer Leonardschaltung mit stetiger oder auch mit Mittelwertsregelung der Drehzahl ohne Vorhandensein von Zusatzdämpfung eine Differentialgleichung fünfter Ordnung ergeben. Die erforderlichen Zusatzdämpfungsspannungen sollen über Siebtransformatoren beschafft werden, womit Transformatoren gemeint sind, die, eingangsseitig an Mischspannungen angeschlossen, die Änderungen derselben übertragen, während die Gleichspannungsanteile lediglich die Sättigungszustände beeinflussen. Durch Einsetzen dieser Siebtransformatoren in das ursprüngliche System erhöht sich die Ordnung seiner Differentialgleichung um zwei Einheiten, voraus-

gesetzt, daß die Transformatoren alle dieselbe Hauptfeldzeitkonstante haben; sorgt man außerdem auch noch dafür, daß die Streufeldzeitkonstanten hinreichend klein sind, so kann man sich mit einer Ordnungserhöhung um eine Einheit begnügen. Die derart für die Übergangsdrehzahl $y$ erhaltene endgültige Differentialgleichung laute

$$y\,a_0 + y^{(1)}\,a_1 + y^{(2)}\,a_2 + y^{(3)}\,a_3 + y^{(4)}\,a_4 + y^{(5)}\,a_5 + y^{(6)} = 0 \qquad (19\text{a}).$$

ihre Hauptgleichung also

$$a_0 + x\,a_1 + x^2\,a_2 + x^3\,a_3 + x^4\,a_4 + x^5\,a_5 + x^6 = 0 \qquad (19\text{b})$$

und die Beiwerte seien

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 49900 \quad s^{-6} & a_3 &= 386 + a_{\delta 3}\,s^{-3} \\ a_1 &= 19662 \quad s^{-5} & a_4 &= 202 + a_{\delta 4}\,s^{-2} \\ a_2 &= \quad 257 + a_{\delta 2}\,s^{-4} & a_5 &= \;\; 32 + a_{\delta 5}\,s^{-1} \end{aligned}\right\} \qquad (19\text{c});$$

hierbei entsprechen die Zahlenwerte den Verhältnissen ohne Zusatzdämpfung, während die Zusatzgrößen $a_\delta$ durch die Siebtransformatoren geliefert werden und nun geeignet zu bemessen sind.

Zur Berechnung der für eine möglichst günstige Abdämpfung der Übergangsdrehzahl erforderlichen Beiwerte $a$ stehen die nachfolgend zusammengestellten Beziehungen zur Verfügung. Die sechs ersten der Gln. (15) geben

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_5}{-v} &= 6 \\ \frac{a_4}{v^2} &= 15 + \frac{b_1}{v^2} \\ \frac{a_3}{-v^3} &= 20 + \frac{b_1}{v^2}\cdot 4 \\ \frac{a_2}{v^4} &= 15 + \frac{b_1}{v^2}\cdot 6 + \frac{b_2}{v^4} \\ \frac{a_1}{-v^5} &= 6 + \frac{b_1}{v^2}\cdot 4 + \frac{b_2}{v^4}\cdot 2 \\ \frac{a_0}{v^6} &= 1 + \frac{b_1}{v^2} + \frac{b_2}{v^4} + \frac{b_3}{v^6} \end{aligned}\right\} \qquad (20);$$

gemäß den ersten drei der Gln. (14) bedeutet dabei

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= w^2_{\underset{1}{6}} = w_1^2 + w_3^2 + w_5^2 \\ b_2 &= w^2_{\underset{2}{6}} = w_1^2\,w_3^2 + w_1^2\,w_5^2 + w_3^2\,w_5^2 \\ b_3 &= w^2_{\underset{3}{6}} = w_1^2\,w_3^2\,w_5^2 \end{aligned}\right\} \qquad (21);$$

die $b$ und $w$ sind gemäß den beiden Gln. (17) an die Bedingungen gebunden

$$b_{1,2,3} > 0, \quad \text{reell} \qquad (22\text{a}),$$

$$w_{1,2,\ldots 6} \quad \text{reell} \qquad (22\text{b});$$

zur Berechnung von $w^2_{1,3,5}$ hat man gemäß Gl. (18a) die Beziehung

$$-\frac{b_3}{v^6} + \frac{w^2}{v^2}\frac{b_2}{v^4} - \left(\frac{w^2}{v^2}\right)^2 \frac{b_1}{v^2} + \left(\frac{w^2}{v^2}\right)^3 = 0 \qquad (23\text{a})$$

und die $w_{1,2,\ldots 6}$ endlich berechnen sich gemäß den Gln. (18b) zu

$$\frac{w_1}{w_2} = \pm\sqrt{w_1^2}, \quad \frac{w_3}{w_4} = \pm\sqrt{w_3^2}, \quad \frac{w_5}{w_6} = \pm\sqrt{w_5^2} \qquad (23\text{b}).$$

Da $a_0$ und $a_1$ hier fest gegeben sind und sich durch die Siebtransformatoren nicht beeinflussen lassen, wird man zunächst die sich aus diesem Umstande ergebenden Beziehungen ermitteln. Man erhält sie aus den beiden letzten der Gln. (20) zu

$$\frac{b_2}{v^4} = \frac{a_1}{-v^5}\cdot\frac{1}{2} - \frac{b_1}{v^2}\cdot 2 - 3 \qquad \text{(24a)},$$

$$\frac{b_3}{v^6} = \frac{a_0}{v^6} - \frac{a_1}{-v^5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{b_1}{v^2} + 2 \qquad \text{(24b)};$$

damit sind $\frac{b_2}{v^4}$ und $\frac{b_3}{v^6}$ durch $\frac{b_1}{v^2}$ ausgedrückt und die Gl. (23a) enthält jetzt nur mehr einen willkürlich veränderlichen Beiwert.

Die Wurzeln der Gl. (23a) müssen gemäß (22a) positiv und reell sein. Hierfür geeignete Beiwerte sind im allgemeinen durch Probieren zu bestimmen. Bis hinauf zu Gleichungen zehnten Grades in $\frac{w}{v}$ — entsprechend Differentialgleichungen zehnter und elfter Ordnung — lassen sich jedoch die in Betracht kommenden Gebiete durch Wurzelausziehung dadurch einengen, daß man die Extremstellen berechnet und sich auf diejenigen Werte $\frac{w^2}{v^2}$ beschränkt, für die alle Extremstellen reell sind; bis hinauf zu Gleichungen achten Grades kann man überdies die Gebiete reeller Nullstellen unmittelbar berechnen. Im vorliegenden Falle erhält man zunächst durch Differenzieren der Gl. (23a) und Nullsetzen

$$\frac{b_2}{v^4} - \frac{w^2}{v^2}\,\frac{b_1}{v^2}\cdot 2 + \left(\frac{w^2}{v^2}\right)^2\cdot 3 = 0 \qquad \text{(25a)},$$

und hieraus für die Extremstellen

$$\frac{w^2}{v^2} = \frac{b_1}{v^2}\cdot\frac{1}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{b_1}{v^2}\cdot\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{b_2}{v^4}\cdot\frac{1}{3}} \qquad \text{(25b)};$$

die drei reellen Nullstellen sind somit sicher auf das Gebiet

$$\frac{b_1}{v^2} > -3 + \sqrt{\frac{a_1}{-v^5}\cdot\frac{3}{2}} \qquad \text{(25c)}$$

beschränkt, wie aus (25b) unter Benutzung von (24a) folgt. Berücksichtigt man noch die Bedingungen $\frac{b_1}{v^2} > 0$ sowie $(-v) > 0$, so findet man, daß der Dämpfungsexponent innerhalb des Bereiches

$$0 < (-v) > \sqrt[5]{\frac{a_1}{6}} \qquad \text{(25d)}$$

zu wählen ist; Einsetzung des Zahlenwertes gibt

$$0 < (-v) < \sqrt[5]{\frac{19662}{6}} \approx 5{,}05\,s^{-1}.$$

Die Grenzen, innerhalb deren $\frac{b_1}{v^2}$ gewählt werden muß, ergeben sich aus (22a), (25c) und (24a, b) gemäß

$$\left.\begin{array}{l} 0 \\ -3 + \sqrt{\frac{a_1}{-v^5}\cdot\frac{3}{2}} \\ \frac{a_1}{-v^5}\,\frac{1}{2} - \frac{a_0}{v^6} - 2 \end{array}\right\} < \frac{b_1}{v^2} < \frac{a_1}{-v^5}\cdot\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \qquad \text{(26)}.$$

Um nun die für $\frac{b_1}{v^2}$ zulässigen Werte genauer einzugrenzen, kann man für einige, innerhalb des Gebietes (25d) zu wählende Parameter $(-v)$ sowie für unabhängig Veränderliche $\frac{b_1}{v^2}$, welche innerhalb des Gebietes (26) liegen, das Verhältnis

$$\frac{-p^3}{q^2} = f\left(\frac{b_1}{v^2}\right) \qquad \text{(27a)}$$

berechnen, wo

$$p = -\left(\frac{b_1}{v^2}\cdot\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{b_2}{v^4}\cdot\frac{1}{3} \qquad \text{(27b)},$$

$$q = -\left(\frac{b_1}{v^2}\cdot\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{b_1}{v^2}\cdot\frac{b_2}{v^4}\cdot\frac{1}{6} - \frac{b_3}{v^6}\cdot\frac{1}{2} \qquad \text{(27c)}$$

bedeuten; $\frac{-p^3}{q^2} > 1$ entspricht dann dem casus irreducibilis der Gl. (23a) und somit den Gebieten, in denen $\frac{b_1}{v^2}$ zu wählen ist. Die Durchrechnung für $(-v) = 2$ 1,5 und $1\,s^{-1}$ gibt drei Bereiche, die um so breiter sind, je kleiner $(-v)$ ist. Ein berechneter Übergangsverlauf wird sich daher mit um so größerer Sicherheit herstellen lassen, je kleiner man $(-v)$ wählt, das aber andererseits mit Rücksicht auf eine schnelle Abdämpfung wiederum möglichst groß sein soll. Als geeignetes Wertepaar kann man

$$(-v) = 1{,}5\,s^{-1}, \quad \frac{b_1}{v^2} = 75$$

nehmen und erhält hierzu gemäß (24a) und (24b)

$$\frac{b_2}{v^4} = 1141, \quad \frac{b_3}{v^6} = 3163.$$

Die Wurzeln der Gl. (23a) berechnen sich schließlich in üblicher Weise zu

$$\frac{w^2}{v^2} = 16{,}04, \; 55{,}30, \; 3{,}55.$$

Zusammenfassend hat sich also ergeben: Eine Drehzahlübergangsform, welche nicht nur die gegebene Differentialgleichung (19a), sondern auch die an erstere zu stellenden Ansprüche befriedigt, wird erhalten, wenn man folgende Werte für die Zusatzbeiwerte herstellt:

$$\begin{aligned}
a_{z2} &= (15 + 75 \cdot 6 + 1141) \cdot 1{,}5^4 - 257 = 7883\,s^{-4},\\
a_{z3} &= (20 + 75 \cdot 4) \cdot 1{,}5^3 - 386 = 694\,s^{-3},\\
a_{z4} &= (15 + 75) \cdot 1{,}5^2 - 202 \approx 0\,s^{-2},\\
a_{z5} &= 6 \cdot 1{,}5 - 32 = -23\,s^{-1}.
\end{aligned}$$

Die Übergangsdrehzahl wird dann gleichmäßig mit der Zeitkonstanten $0{,}67\,s$ abgedämpft und setzt sich aus drei Komponentenpaaren zusammen, die periodisch mit den Frequenzen $f_{1,2} \approx 1{,}0\,s^{-1}$, $f_{3,4} \approx 1{,}8\,s^{-1}$ und $f_{5,6} \approx 0{,}5\,s^{-1}$ verlaufen.

Im Falle ganzer Funktionen zweiten und dritten Grades kann man sich auf sehr einfache Weise einen Überblick über sämtliche Nullstellen und insbesondere über die Lage aller Nullstellen mit gleichem Realteil verschaffen.

Führt man zunächst in die Funktion zweiten Grades

$$g(x) \equiv a_0 + x\,a_1 + x^2 \quad \text{(28a)}$$

die Größen

$$\xi = \frac{x}{+\sqrt{|a_0|}}, \quad \alpha_1 = \frac{a_1}{+\sqrt{|a_0|}} \quad \text{(29)}$$

ein, so kann man (28a) in der Form schreiben

$$\frac{g(x)}{a_0} \equiv 1 \pm \xi\,\alpha_1 \pm \xi^2 \quad \text{(28b)},$$

wobei die oberen oder unteren Vorzeichen zu verwenden sind, je nachdem $a_0$ größer oder kleiner als Null ist. Die Nullstellen der Funktion (28b) sind

$$\xi = \mu + j\,\nu = -\frac{\alpha_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)^2 \mp 1} \quad \text{(30)},$$

wo die beiden Vorzeichen unter der Wurzel sich wie vorher auf das Vorzeichen von $a_0$ beziehen. Reelle und imaginäre Wurzelkomponente $\mu$ bzw. $\nu$ sind in Bild 1 als Funktion von $\alpha_1$ dargestellt.

In die Funktion dritten Grades

$$g(x) \equiv a_0 + x\,a_1 + x^2\,a_2 + x^3 \quad \text{(31a)}$$

kann man die Ausdrücke

$$\xi = \mu + j\,\nu = \frac{x}{\sqrt[3]{a_0}}, \quad \alpha_1 = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0^2}}, \quad \alpha_2 = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_0}} \quad \text{(32)}$$

einführen, worauf man erhält

$$\frac{g(x)}{a_0} \equiv 1 + \xi\,\alpha_1 + \xi^2\,\alpha_2 + \xi^3 \quad \text{(31b)}.$$

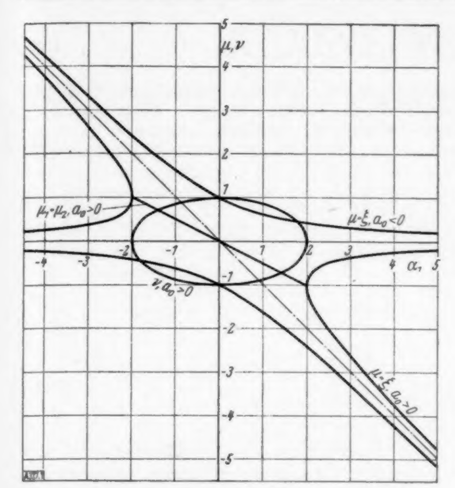



Bild 1. Die Nullstellen $\xi = \mu + j\nu$ der ganzen rationalen Funktion zweiten Grades $1 \pm \xi a_1 \pm \xi^2$ ($\pm \triangleq a_0 \gtrless 0$).

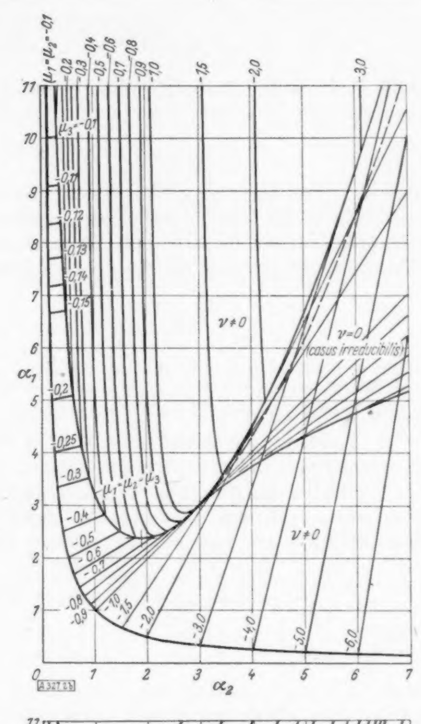



Bild 2b (rechts). Kleinstwerte der reellen Nullstellenkomponenten $\mu$ der ganzen rationalen Funktion dritten Grades $1 + \xi a_1 + \xi^2 a_2 + \xi^3$ im negativen Grenzbereich.

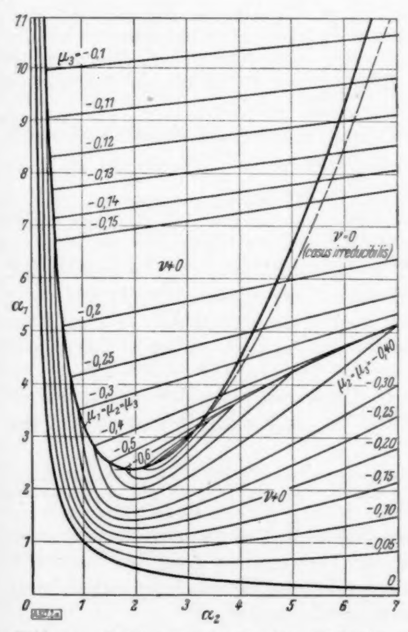



Bild 2a. Größtwerte der reellen Nullstellenkomponenten $\mu$ der ganzen rationalen Funktion dritten Grades $1 + \xi a_1 + \xi^2 a_2 + \xi^3$ im negativen Grenzbereich.

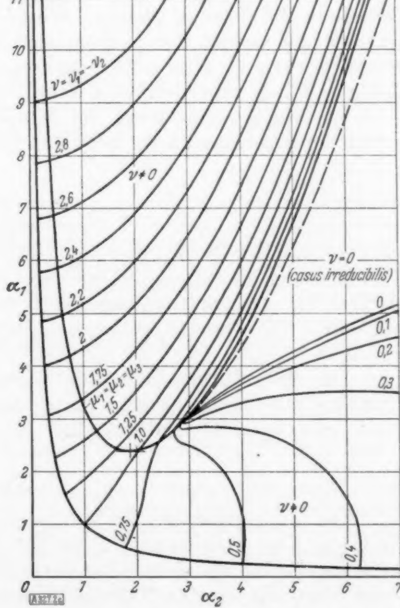



Bild 2c. Imaginäre Nullstellenkomponenten $\nu$ der ganzen rationalen Funktion dritten Grades $1 + \xi a_1 + \xi^2 a_2 + \xi^3$ im negativen Grenzbereich der reellen Nullstellenkomponenten.

Die Nullstellenkomponenten $\mu$ und $\nu$ sind nur von $a_1$ und $a_2$ abhängig und lassen sich daher in einer Ebene darstellen, was in Bild 2a und 2b für $\mu$ und zwar für dessen negativen Grenzbereich, der gemäß dem oben Gesagten hier hauptsächlich interessiert, geschehen ist.

Der Bereich nur negativer Realkomponenten wird begrenzt durch die Kurve, auf der zwei der reellen Komponenten verschwinden, $\mu_1 = \mu_2 = 0$, und die gemäß den drei ersten Gln. (8) dargestellt wird durch die gleichseitige Hyperbel

$$a_1 = \frac{1}{a_2} = -\frac{1}{\mu_3} \quad \text{(33)}.$$

Alle drei reellen Nullstellenkomponenten sind gleich groß, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$, auf der Kurve

$$a_1 = \left(\frac{a_2}{3}\right)^2 \cdot 2 + \frac{3}{a_2} = \mu^2 \cdot 2 - \frac{1}{\mu} \quad \text{(34)},$$

wie sich mit Hilfe der drei ersten Gln. (15) ergibt. Der Bereich, in dem alle drei Nullstellen reell sind, der also dem casus irreducibilis entspricht und in dem die Kurve (34) keine Gültigkeit mehr besitzt, hat als Grenze eine Kurve, die durch $\mu_1 = \mu_2$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$ gekennzeichnet ist und durch die Gleichungen

$$a_1 = \mu_1^2 - \frac{2}{\mu_1} \quad \text{(35a)},$$

$$a_2 = \frac{1}{\mu_1^2} - \mu_1 \cdot 2 \quad \text{(35b)}$$

beschrieben wird.

Außer diesen Grenzlinien sind in Bild 2a auch die Schichtlinien für die größten $\mu$-Werte eingezeichnet, die also den am langsamsten verschwindenden Übergangsgliedern entsprechen in dem Falle, daß die kubische Gleichung die Dämpfungsexponenten einer Übergangserscheinung bestimmt, während Bild 2b die restlichen $\mu$-Werte enthält. Für die Berechnung dieser Schichtlinien im komplexen Gebiete erhält man mit $\mu_1 = \mu_2$ aus den ersten drei Gln. (8)

$$a_1 = -\mu_3 (a_2 + \mu_3) - \frac{1}{\mu_3} \quad \text{(36a)}$$

sowie

$$a_2 = -\mu_1 \cdot 2 - \mu_3 \quad \text{(36b)}.$$

Man zeichnet demnach am einfachsten zunächst die Geraden (36a), welche bereits die $\mu_3$-Linien darstellen; auf diesen trägt man dann gemäß (36b) die $\mu_1$-Punkte ein und erhält durch Verbinden der Punkte gleicher Werte die $\mu_1$-Linien. Im reellen Gebiete bestimmen sich die $\mu$-Linien auf Grund der Bedingungen $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$, was für jede der drei reellen Komponenten $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$ eine Gleichung von der Form (36a) gibt, so daß die $\mu$-Linien des reellen Gebietes durch eine dreifache Schar von Geraden wiedergegeben werden.

In Bild 2c sind noch die Schichtlinien der zugehörigen imaginären Nullstellenkomponenten aufgezeichnet. Sie bestimmen sich gemäß der Gleichung

$$a_2 = -\mu_3 + \sqrt{-\frac{4}{\mu_3} - (\nu \cdot 2)^2} \quad \text{(37)},$$

die man aus den ersten drei Gln. (8) mit $\mu_1 = \mu_2$ erhält und in der $\nu_1 = -\nu_2 = \nu$ gesetzt ist. Auch diese Schichtlinien lassen sich sehr einfach konstruieren, wenn man jeweils auf einer $\mu_3$-Geraden die verschiedenen Werten $\nu$ entsprechenden $a_2$-Punkte gemäß Gl. (37) einträgt und dann die Punkte gleicher $\nu$-Werte auf den verschiedenen $\mu_3$-Geraden miteinander verbindet.

Die oben für die Dämpfung ausgewählten Nullstellen liegen im Falle der quadratischen Funktion auf der Geraden $\mu_1 = \mu_2$ des Bildes 1, im Falle der kubischen Funktion auf der Kurve $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ der Bilder 2.

## Zusammenfassung.

Der Zusammenhang zwischen gegebenen komplexen Nullstellen einer ganzen rationalen Funktion $n$-ten Grades und ihren Beiwerten läßt sich unter Verwendung einer symbolischen Schreibweise in übersichtlicher Form darstellen. Besonders einfache Beziehungen erhält man, wenn sämtliche reellen Nullstellen als gleich groß vorausgesetzt werden.

Dieser letztere Fall entspricht der günstigsten Abdämpfung von Übergangserscheinungen, die sich durch zusammenhängende lineare Differentialgleichungen mit konstanten Beiwerten beschreiben lassen, da ja die Summe der Dämpfungsexponenten hier gegeben ist, ihre Aufteilung in gleich große Komponenten somit die schnellstmögliche Abdämpfung verspricht. Ein zufriedenstellender Verlauf der Übergangserscheinung kann derart bei mäßigem Rechenaufwand genau vorausbestimmt werden. Die Anwendung dieses Verfahrens wird an einem Zahlenbeispiel für eine Differentialgleichung sechster Ordnung ausführlich behandelt.

Zwei Bilder geben einen Überblick über die Lage der hier in Frage kommenden Nullstellen im Falle der beiden einfachsten Funktionen mit komplexen Nullstellen, der quadratischen und der kubischen.

# KLEINE MITTEILUNGEN

**Die Differentialgleichung der Biegungsschwingungen eines axial belasteten geraden Stabes, dessen Material dem Hookeschen Gesetz nicht folgt.** 1. Ein prismatischer homogener Stab schwinge in der vertikalen Symmetrieebene unter der Wirkung einer axialen Kraft $P$, die als positiv zu betrachten ist, wenn sie auf den Stab Zug ausübt. Wir beziehen den Stab auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz, dessen $x$-Achse mit der Stabachse in der spannungslosen Anfangslage zusammenfällt und dessen $y$-Achse ihre positive Richtung nach oben hat.

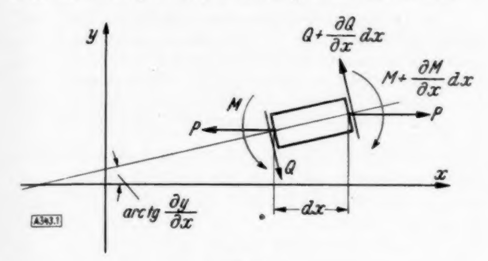



Bild 1.

2. Wir betrachten das Gleichgewicht an einem Stabelement von der Länge $dx$, das durch zwei Querschnitte aus dem Stabe herausgetrennt wird. Die Bewegung dieses Elements kann als eine resultierende Bewegung von zwei einfachen Bewegungen aufgefaßt werden, und zwar von einer Translationsbewegung in der vertikalen Richtung und von einer Drehbewegung um eine senkrecht zur Biegungsebene gerichtete Achse. Diese beiden Bewegungen werden anfangs gesondert für sich behandelt.

3. An den Endquerschnitten des Stabelementes wirken die Schubkräfte $-Q$ und $Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx$. Wird die vertikale Komponente der etwa vorhandenen äußeren Kraft für die Längeneinheit mit $Y$ bezeichnet, so ist der auf das Stabelement fallende Anteil dieser Kraft $Y\,dx$ und die Resultierende sämtlicher Kräfte

$$\frac{\partial Q}{\partial x} dx + Y\,dx .$$

Diese ist mit dem d'Alembertschen Trägheitswiderstand

$$\varrho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx$$

des Elementes gleichzusetzen, wo $\varrho$ die Dichte des Stabes und $F$ die Fläche des Querschnittes bedeuten. Man erhält somit nach Wegheben von $dx$ als Differentialgleichung der reinen Translationsbewegung des Stabelementes

$$\varrho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} + Y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

4. Um zur Differentialgleichung der Drehbewegung des Stabelementes zu gelangen, betrachten wir das Gleichgewicht der statischen Momente aller an dem Element angreifenden Kräfte in bezug auf den Schwerpunkt des Elementes. Die Biegungsmomente werden als positiv betrachtet, wenn sie in der Richtung von der positiven $x$-Achse nach der positiven $y$-Achse hindrehen.

Die an den Endquerschnitten des Stabelementes wirkenden Schubkräfte $-Q$ und $Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx$ liefern das Moment

$$Q\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Das Moment der entgegengesetzt gerichteten Längskräfte $P$ ist

$$-P \frac{\partial y}{\partial x} dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die an den Enden des Elementes angreifenden Momente $M$ und $-\left(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx\right)$ der Normalspannungen ergeben das resultierende Moment

$$-\frac{\partial M}{\partial x} dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

5. Wir nehmen an, daß die der Dehnung $\varepsilon$ des Materials entsprechende Normalspannung $\sigma$ durch eine stetige und eindeutige Formänderungsfunktion

$$\sigma = \sigma(\varepsilon) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

bestimmt ist, ferner daß das Material diesem Gesetz uneingeschränkt folgt. Unter der Bernoullischen Annahme, daß die Ebenen, die vor der Verformung senkrecht zur Achse des Stabes liegen, auch nach der Verformung eben verbleiben, läßt sich für das Moment $M$ der Normalspannungen $\sigma$ folgende Reihenentwicklung ableiten [1])

$$M = c_1 \alpha + c_2 \alpha^2 + c_3 \alpha^3 + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

wo

$$\alpha = -\frac{1+\varepsilon_s}{\varrho} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

und

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= I\,\sigma'(\gamma) \\ c_2 &= \frac{1}{2!} I_3\,\sigma''(\gamma) \\ c_3 &= \frac{1}{3!} I_4\,\sigma'''(\gamma)\left[1 - 3\,\frac{I^2}{F I_4}\,\frac{(\sigma''(\gamma))^2}{\sigma'(\gamma)\,\sigma'''(\gamma)}\right] \\ &- - - - - - - - - - - - \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (8).$$

Hier bedeutet $\varepsilon_s$ die Dehnung im Schwerpunkt des Stabquerschnittes, $\varrho$ den Krümmungsradius der elastischen Achse des Stabes, $I$ das Trägheitsmoment des Querschnittes in bezug auf eine zur Biegungsebene senkrechte, durch den Schwerpunkt des Stabquerschnittes gehende Achse und $I_3 = \int \eta^3\,dF$, $I_4 = \int \eta^4\,dF \ldots$ auf dieselbe Achse bezogene höhere Momente der Querschnittsfläche. $\gamma$ ist die der mittleren Längsspannung $\sigma_m = \frac{P}{F}$ entsprechende Dehnung, die durch die Formänderungsfunktion (5) als $\sigma_m = \sigma(\gamma)$ bestimmt ist. $\sigma'(\gamma)$, $\sigma''(\gamma) \ldots$ sind die Ableitungen von (5) nach $\varepsilon$, wenn $\varepsilon = \gamma$.

Wir beschränken uns bei unserer Betrachtung auf die an der Fließgrenze des Materials oder unterhalb derselben vorhandenen Spannungen. Dann ist der Wert der Dehnung $\varepsilon_s$ für alle Materialien so klein, daß man ihn mit Eins verglichen ohne erheblichen Fehler weglassen und (7) in Form

$$\alpha = -\frac{1}{\varrho}$$

schreiben kann, wodurch (6) in

$$M = -c_1 \frac{1}{\varrho} + c_2 \frac{1}{\varrho^2} - c_3 \frac{1}{\varrho^3} + \cdots \quad . \quad . \quad (9)$$

übergeht.

[1]) Arvo Ylinen: Erweiterung der Bernoullischen Biegungstheorie auf den unelastischen Bereich. Annales Acad. Scient. Fenn. Ser. A. Tom. LVII, Nr. 7 (1941), S. 10.

6. Nach den Lehren der analytischen Geometrie gilt für die Krümmung der elastischen Achse des Stabes die Formel

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\left[1+\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Wenn so kleine Ausbiegungen des Stabes vorausgesetzt werden, daß $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ der Einheit gegenüber vernachlässigt werden darf, so ist

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Wird dieser Wert in die Reihenentwicklung (9) eingesetzt, so erhält man

$$M=-c_1\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+c_2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2-c_3\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^3+\cdots,$$

womit (4) in

$$\left.\begin{array}{l}-\dfrac{\partial M}{\partial x}\,\mathrm{d}x=\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left[c_1\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}-c_2\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+c_3\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^3-\cdots\right]\mathrm{d}x\end{array}\right\}\quad(10)$$

übergeht. Die Resultierende der Momente (2), (3) und (10) ist

$$\left.\begin{array}{l}Q\,\mathrm{d}x-P\dfrac{\partial y}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left[c_1\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}-c_2\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+c_3\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^3-\cdots\right]\mathrm{d}x\end{array}\right\}\quad(11).$$

Sie ist der kinetischen Reaktion der Verdrehung des Elementes gleichzusetzen, die sich als Produkt der Winkelbeschleunigung und des Massenträgheitsmomentes des Elementes $\mathrm{d}x$ in bezug auf die Rotationsachse ergibt. Der Winkel, welchen die Tangente der elastischen Achse des Stabes mit der $x$-Achse bildet, kann gleich $\frac{\partial y}{\partial x}$ gesetzt werden, wodurch sich als die Winkelbeschleunigung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{\partial^3 y}{\partial t^2\,\partial x}$$

ergibt. Das Massenträgheitsmoment des Stabelementes ist $\varrho I\,\mathrm{d}x$, da die Dicke $\mathrm{d}x$ des Elementes im Vergleich mit der Stabhöhe als unendlich klein angenommen wird. Man erhält somit nach Wegheben von $\mathrm{d}x$ als Differentialgleichung der Drehbewegung des Elementes

$$\left.\begin{array}{l}\varrho I\dfrac{\partial^3 y}{\partial t^2\,\partial x}=Q-P\dfrac{\partial y}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \quad\left[c_1\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}-c_2\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+c_3\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^3-\cdots\right]\end{array}\right\}\quad(12).$$

Eliminiert man aus den Gleichungen (1) und (12) die Schubkraft $Q$, so ergibt sich als Differentialgleichung der Biegungsschwingungen eines axial belasteten geraden Stabes, dessen Material dem Formänderungsgesetz (5) folgt

$$\left.\begin{array}{l}\varrho F\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}-P\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial x^2}\\ \quad\left[c_1\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}-c_2\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+c_3\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^3-\cdots\right]\\ \quad=\varrho I\dfrac{\partial^4 y}{\partial t^2\,\partial x^2}+Y\end{array}\right\}\quad(13).$$

Hierbei haben die Koeffizienten $c$ die Werte (8).

Wenn die Längskraft $P=0$, so verschwindet das zweite Glied der linken Seite und in den Koeffizienten (8) ist $\gamma=0$ einzusetzen.

7. Tritt an Stelle der allgemeinen Formänderungsfunktion (5) das Hookesche Gesetz $\sigma=E\,\varepsilon$, so ist $\sigma'(\gamma)=E$ und die höheren Ableitungen $\sigma''(\gamma)=\sigma'''(\gamma)=\ldots=0$. Hieraus folgt, daß $c_1=I\,E$, die Koeffizienten $c_2=c_3=\ldots=0$ und (13) sich auf die bekannte Differentialgleichung

$$\varrho F\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+I\,E\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=\varrho I\frac{\partial^4 y}{\partial t^2\,\partial x^2}+Y$$

der Biegungsschwingungen eines axial belasteten geraden Stabes reduziert.

8. Das obige Verfahren zur Ableitung der Differentialgleichung der Biegungsschwingungen kann weiter für den Fall verallgemeinert werden, daß der Stab einen veränderlichen Querschnitt hat. Die Querschnittsfläche $F$ des Stabes, die Momente $I$, $I_3$, $I_4\ldots$, die der mittleren Längsspannung $\sigma_m=\frac{P}{F}$ entsprechende Dehnung $\gamma$ und die Koeffizienten $c$ in (8) sind dann als Funktionen von $x$ zu betrachten. Wir bezeichnen diese neuen Variabeln mit $F(x)$, $I(x)$, $I_3(x)\ldots$, $\gamma(x)$, $c_1(x)$, $c_2(x)\ldots$ Nimmt man dieselben Rechenoperationen wie im vorigen vor, so erhält man als Differentialgleichung eines axial belasteten geraden Stabes mit veränderlichem Querschnitt

$$\left.\begin{array}{l}\varrho F(x)\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}-P\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial x^2}\\ \left[c_1(x)\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}-c_2(x)\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+c_3(x)\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^3-\cdots\right]\\ =\varrho\dfrac{\partial}{\partial x}\left(I(x)\dfrac{\partial^3 y}{\partial t^2\,\partial x}\right)+Y\end{array}\right\}\quad(14).$$

Helsinki. Arvo Ylinen. 343

**Eine einfache geometrisch-mechanische Analogie.** Betrachten wir die Aufgabe:

Auf welche Art und Weise sollen $n$ ungleichen Massen $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ auf einem Kreis verteilt werden, so daß das Massenzentrum dieses dem Kreise eingeschriebenen $n$-Eckes, mit inhomogenen materiellen Ecken, mit dem Kreiszentrum zusammenfalle?

1. Hat man gleiche Massen, muß $n$ offenbar mindestens 2 sein — diametralentgegengesetzte Punkte; ist $n$ gerade, so sind je zwei diametralentgegengesetzte Lagen stets zulässige Anordnungen. Der Bedingung entsprechen ebenfalls die regelmäßigen Vielecke; bei geradem $n$ ist dies offensichtlich, da man wiederum zu diametralentgegengesetzten Lagen der Punkte kommt; bei ungeradem $n$ folgt die Bestätigung aus dem bekannten Satz, daß die $n$ Wurzeln der Einheit geometrisch durch die Ecken der regelmäßigen, dem Einheitskreise eingeschriebenen, Vielecken repräsentiert werden. Sind die Ecken durch $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ bestimmt, so ist $z_1+z_2+z_3+\ldots+z_n=0$, da die Summe der Wurzeln der Gleichung $z^n-1=0$ Null ist. Immer noch bei Voraussetzung gleicher Massen ergeben sich neue, außer den schon benannten mögliche Anordnungen der $n$ Punkte, wenn wir kombinieren: z. B. lassen sich 5 Punkte noch auf unendlich viele Weise verteilen, wenn man sich das Fünfeck aus einem gleichseitigen Dreieck und einem beliebigen Durchmesser des Kreises gebildet denkt; analog, das Sechseck, entweder aus Quadrat und Durchmesser, oder aber aus zwei gleichseitigen Dreiecken; das Siebeneck, aus Quadrat und gleichseitigem Dreieck oder aus einem schon gewonnenen allgemeinen Fünfeck, kombiniert mit einem Durchmesser usf.

Wir stellen uns nun die Frage: welches sind die Bedingungen für die allgemeinsten Anordnungen der $n$ (gleichen oder ungleichen) Massenpunkte, die unserer Forderung entsprechen, und wie kann man diese allgemeinsten Vielecken erhalten?

2. Die analytischen Bedingungen der Aufgabe lauten:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k x_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_k y_k = 0 \quad . \; . \; . \quad (1),$$

$$x_k^2 + y_k^2 = 1, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n) \quad . \; . \; . \quad (2).$$

Dieses System (1,2) von $n + 2$ Gleichungen mit $2n$ Unbekannten $x_k$, $y_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) wird bestimmt nur wenn $n = 3$ ist. In der Tat wird der eine Punkt beliebig auf dem Kreise gewählt, so besteht dieses System aus 4 Gl. mit 4 Unbekannten. Im allgemeinen haben wir mit $n + 1$ Gl. mit $2(n-1)$ Unbekannten zu tun. Bei $n = 4$ bekommt man 5 Gl. mit 6 Unbekannten, so daß man $\infty^1$ Vielecke hat. Wir verfügen nun über einen Freiheitsgrad, so daß wir noch einen Punkt beliebig wählen. Bei $n = 5$ erhält man 6 Gl. mit 8 Unbekannten, d. h. $\infty^2$ Fünfecke. Wird ein zweiter Punkt fixiert, so wird das System auf 5 Gl. mit 6 Unbekannten reduziert; wir verfügen also über noch einen Freiheitsgrad, denn man gelangt erst nach dem Auswählen eines dritten beliebigen Punktes auf ein System von 4 Gl. mit 4 Unbekannten. Im allgemeinen, da durch die Festlegung jedes weiteren Punktes die Gleichungen um 1 und die Unbekannten um 2 abnehmen, sieht man, daß, damit man, für $n \geqq 3$, auf ein bestimmtes Gleichungssystem kommt, man $n - 2$ Punkte fixieren muß. Und jetzt wird gefragt, ob diese $n - 2$ Punkte ganz willkürlich auf dem Kreise genommen werden können? Die Antwort auf diese Frage lautet verneinend.

Setzen wir

$$-\sum_{1}^{n-2} m_k x_k = X, \quad -\sum_{1}^{n-2} m_k y_k = Y \quad . \; . \; . \quad (3);$$

in diesen Gleichungen sind $x_k, y_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n-2$) bekannt, da sie sich auf die ersten $n-2$ beliebig genommenen Punkte $M_1, M_2, \ldots, M_{n-2}$ beziehen. Auf Grund von (1) lassen sich die Koordinaten der letzten zwei (der gesuchten) Punkte $M_{n-1}$, $M_n$ aus

$$m_{n-1} x_{n-1} + m_n x_n = X, \quad m_{n-1} y_{n-1} + m_n y_n = Y \quad (4)$$

bestimmen:

$$x_n = \frac{X - m_{n-1} x_{n-1}}{m_n}, \quad y_n = \frac{Y - m_{n-1} y_{n-1}}{m_n} \quad (5);$$

$$x_{n-1} = \frac{X - m_n x_n}{m_{n-1}}, \quad y_{n-1} = \frac{Y - m_n y_n}{m_{n-1}} \quad . \; . \quad (6).$$

(5), (6) sollen den Gl. (2) genügen, woraus sich die Gleichungen

$$\left(x_{n-1} - \frac{X}{m_{n-1}}\right)^2 + \left(y_{n-1} - \frac{Y}{m_{n-1}}\right)^2 = \left(\frac{m_n}{m_{n-1}}\right)^2 \quad (7),$$

$$\left(x_n - \frac{X}{m_n}\right)^2 + \left(y_n - \frac{Y}{m_n}\right)^2 = \left(\frac{m_{n-1}}{m_n}\right)^2 \quad (8)$$

ergeben. Diese Gleichungen stellen zwei Kreise $K_{n-1}$, $K_n$ dar, und zwar die, daß auf dem Kreis $K_{n-1}$, dessen Zentrum $S_{n-1}$ die Koordinaten $\frac{X}{m_{n-1}}$, $\frac{Y}{m_{n-1}}$ hat und dessen Radius $r_{n-1} = \frac{m_n}{m_{n-1}}$ ist, der Punkt $M_{n-1}$ ($x_{n-1}$, $y_{n-1}$) liegt und auf dem Kreis $K_n$ mit Zentrum $S_n\left(\frac{X}{m_n}, \frac{Y}{m_n}\right)$ und Radius $r_n = \frac{m_{n-1}}{m_n}$, der andere Punkt $M_n$ ($x_n$, $y_n$).

Andererseits müssen, der Forderung der Aufgabe nach, diese beiden Punkte $M_{n-1}$, $M_n$ gleichzeitig auf dem gegebenen Kreise $K$ liegen, was bedeutet, daß sie die Schnittpunkte von $K_{n-1}$, $K_n$ mit $K$ sind. Die gesuchte Bedingung für die Anordnungen der $n$ Punkte auf dem Kreise $K$ wird also durch die Bedingung des Schneidens der Kreise (7), (8) mit dem gegebenen Kreis gegeben; sie lautet:

$$\left|1 - \frac{m_n}{m_{n-1}}\right| \leqq \left|\frac{U}{m_{n-1}}\right| \leqq \left|1 + \frac{m_n}{m_{n-1}}\right|,$$

wo $|U| = +\sqrt{X^2 + Y^2}$ der Abstand des Punktes $R'_{n-2}(X, Y)$ $\left(\text{und was dasselbe ist des Punktes } R_{n-2}\left(\sum_{1}^{n-2} m_k x_k, \sum_{1}^{n-2} m_k y_k\right)\right)$ vom Koordinatenanfang $O$ ist. Die obigen Ungleichheiten lassen sich einfacher folgendermaßen schreiben:

$$|m_{n-1} - m_n| \leqq |U| \leqq |m_{n-1} + m_n| \quad . \; . \quad (9).$$

3. Wir wollen zunächst den Fall gleicher Massen (= 1) betrachten. (9) gibt einfach $|U| \leqq 2$; das heißt, der Radiusvektor $\overrightarrow{R'_{n-2}}$ $(X, Y)$, der der Resultante der ersten $n-2$ Vektoren $\overrightarrow{OM_k}$ gleich ist, darf nicht größer als das Doppelte des Radius des gegebenen Kreises sein. Mit anderen Worten: das Ende des Vektors $\overrightarrow{R_{n-2}}$ muß innerhalb des Kreises $C$ liegen, der zum Kreise $K$ konzentrisch ist und den Radius 2 hat. Die Gl. (7), (8) reduzieren sich auf den einzigen Kreis

$$(x^2 - X)^2 + (y - Y)^2 = 1 \quad . \; . \; . \; . \quad (10),$$

welcher $K$ in den gesuchten Punkten $M_{n-1}$, $M_n$ schneidet. Damit die Aufgabe eine Lösung hat, darf das Zentrum von (10) höchstens auf dem Kreise $C$ liegen; in diesem Fall berührt er den gegebenen Kreis $K$. Dann besitzt das gesuchte Vieleck eine „Doppelecke". Aus Bild 1 ersieht man die Konstruktion eines allgemeinen Fünfecks des erwünschten Typus. Bild 2 stellt den Fall unmöglicher Lösung dar.

4. Ungleiche Massen. Diese können auch negativ sein. Jetzt schließen wir aus (9), daß, wenn man um den Anfangspunkt $O$ zwei Kreise $C'$, $C''$ mit den Radien $|m_{n-1} - m_n|$ und $|m_{n-1} + m_n|$ beschreibt, das Ende des Radiusvektors $\overrightarrow{R_{n-2}}$, im Falle möglicher Lösung, nicht außerhalb des Ringes der beiden konzentrischen Kreise $C'$, $C''$ liegen darf. Die Schnittpunkte von $K$ mit (7) und (8) geben uns zwei richtige Lösungen, wenn die Punkte der Punktpaare $M_{n-1}, M_n$; $M'_{n-1}$, $M'_n$ auf verschiedenen Seiten der Geraden liegen. Bild 3 zeigt ein Fünfeck dieser Art. Die Konstruktion folgt aus der obigen analytischen Betrachtung der Kreise (7), (8), aus der man sieht, wie die Mittelpunkte $S_{n-1}$, $S_n$ und die Radien $r_{n-1}$, $r_n$ gefunden sind (Radius von $K = 1$). Im betrachteten Falle sind $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$ von vornherein gegeben und $M_1, M_2, M_3$ beliebig aus dem Kreise $K$ genommen, jedoch so, daß, sobald wir eine Lösung haben, und zwar ohne Doppelpunkte, die Bedingung (9) (wobei nur an einer Stelle ein Gleichheitszeichen zulässig ist) befriedigt wird. Kommen an den beiden Seiten Gleichheitszeichen, erhalten wir Bild 4, in welcher sich das Fünfeck auf ein Viereck reduziert hat; die vierte Ecke trägt jetzt zwei verschiedene Maßen. Keine Lösung ergibt sich, wenn $K_{n-1}$, $K_n$ den Kreis $K$ nicht treffen.

Haben wir schließlich $X = Y = 0$, bilden also die gewählten $n-2$ Punkte schon ein $(n-2)$-Eck der

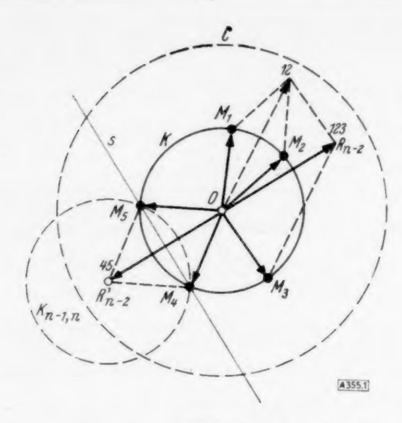



Bild 1.

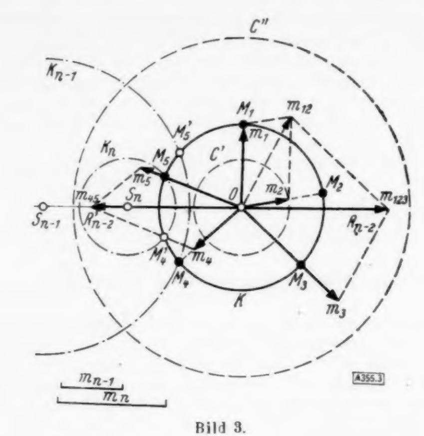



Bild 3.

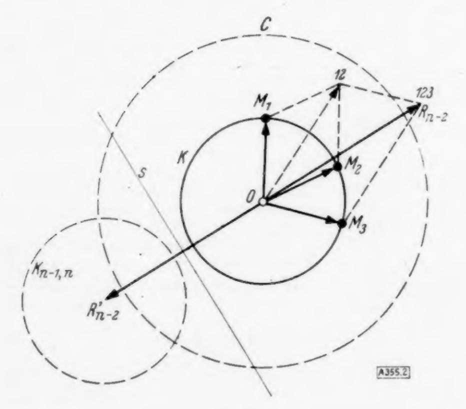



Bild 2.

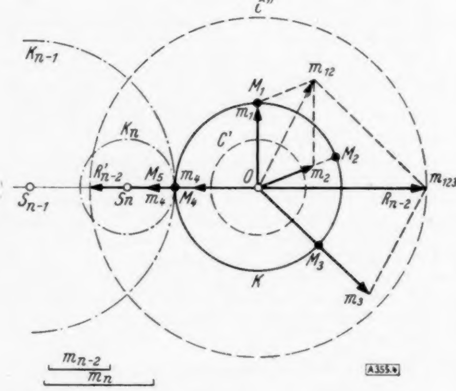



Bild 4.

betrachteten Eigenschaft, so hat unsere Aufgabe, beim Falle ungleicher Massen, keine Lösung. In der Tat werden die Kreise (7), (8)

$$x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2 = \left(\frac{m_n}{m_{n-1}}\right)^2 \quad . \; . \; . \quad (11),$$

$$x_n^2 + y_n^2 = \left(\frac{m_{n-1}}{m_n}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (12).$$

Das sind zwei konzentrische Kreise um $O$, die $K$ nicht schneiden können. Nur wenn die letzten zwei Massen gleich sind (die ersten $n-2$ brauchen ja nicht gleich zu sein), läßt die Aufgabe eine Lösung zu; die beliebige diametralgegengesetzte Lage dieser zwei Punkte ergänzt die Konfiguration zur gewünschten Lösung.

Damit sind alle möglichen allgemeinsten Lösungen des Problems erschöpft.

Diese geometrische Aufgabe deckt sich mit folgendem mechanischen Problem:

Auf welche Art und Weise sollen $n$ verschiedene (schwere oder gewichtlose Massen auf der Peripherie einer homogenen Scheibe, die auch als masselos angenommen werden kann, verteilt werden, so daß bei der Drehung dieser Scheibe um eine vertikale zur Scheibe senkrechten Rotationsachse, durch ihr Zentrum, die Drehachse keinen Druck erfährt? (Bild 5).

Nimmt man an, die Massen seien gewichtlos, so ist es gleichgültig, ob die Drehachse vertikal oder nicht ist; das Nichtvorhandensein der Gravitation verlangt ebenfalls nicht „Scheibe ohne Masse", sondern sie muß nur homogen sein. In jedem Fall, betrachten wir die Scheibe und die $n$ Massenpunkte als einen festen Körper, und zwar als einen solchen mit unstetig konzentrierten Massen in konstanten Zwischenabständen. Unter diesen Voraussetzungen ist es offenbar, daß auf jeden der $n$ Punkte eine zentrifugale (inertiale) Kraft wirkt, welche durch $O$ geht und die Größe $-m_k\,\omega^2 R$ hat ($\omega$ = Rotationsgeschwindigkeit, $R$ = Scheibenradius). Ist $P$ derjenige Scheibenpunkt, der mit dem Schwerpunkt (Massenpunkte) der $n$ materiellen Punkte zusammenfällt, so wird auf $P$ die resultierende Zentrifugalkraft $-M\omega^2 r$ wirken, wo $M = \Sigma m_k$, $r = \overline{OP}$ ist. Diese Druckkraft würde die Drehachse der

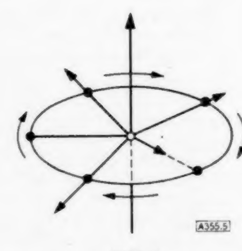


Bild 5.

Scheibe erfahren infolge der angenommenen festen Bindung der $n$ Punkte mit Scheibe und Achse.

Damit dieser Druck gleich Null sei, muß der Punkt $P$ mit $O$ zusammenfallen. Mechanisch drückt man diese Tatsache so aus: Die Rotationsachse bleibt frei, d. h. sie erfährt keine Druckkomponente, außer einer solchen in ihrer Richtung, wenn sie eine Hauptträgheitsachse in bezug auf $O$ ist. Sie muß infolgedessen durch $O$ gehen, da sie, wie angenommen, normal der Scheibe steht. Setzt man der Kürze halber $\omega^2 R = 1$, was bedeutet, daß wir die Zentrifugalkräfte gleich den entsprechenden Massen reduzieren, so wird es sich um eine derartige Verteilung der Massenpunkte $M_k$ auf dem Scheibenrande handeln, daß wir für die Summe der $n$ Vektoren $\vec{m}_k$ mit Richtung $\overrightarrow{OM_k}$ Null erhalten. Dies ist aber identisch mit der Bedingung (1,2). Man zerlegt im Falle gleicher Massen (Bild 1 und Bild 2) den Vektor $\vec{R}'_{n-2}$ $(\overrightarrow{O R'_{n-2}} = -\overrightarrow{O R_{n-2}} = -\sum_1^{n-2} m_k)$, der $\leqq 2$ sein muß, da $\vec{m}_{k-1} + \vec{m}_k \leqq 2$, so in zwei Vektoren, daß ihre Enden auf den Kreis $K$ fallen. Bei ungleichen Vektoren (Bild 3 und 4) ist $\vec{R}'_{n-2}$ in zwei von vornherein gegebene Vektoren $\vec{m}_{n-1}$, $\vec{m}_n$ zu zerlegen, was nur möglich ist, wenn die drei Vektoren $\vec{R}'_{n-2}$, $\vec{m}_{n-1}$, $\vec{m}_n$ ein richtiges Dreieck bilden. Die betrachtete Aufgabe stellt folglich eine Verallgemeinerung des bekannten Stevinsprinzips dar.

Man sieht aus dieser doppelten Behandlung der Aufgabe, daß bei gewissen Problemen, wie bei dem untersuchten, das vereinigte, analytisch-vektorielle Verfahren sehr instruktiv sein kann.

Budapest. Bl. Dolaptschiew. 355

**Zur Berechnung der Eigenfrequenzen inhomogener Saiten.** In einer in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit[1]) behandelt A. Erdélyi das Problem der Annäherung der Eigenwerte der Differentialgleichung

$$\left.\begin{array}{l} y'' + \lambda\, q(x)\, y = 0 \\ \text{(Randbedingungen } y(0) = y(1) = 0) \end{array}\right\} . \quad (1),$$

wo $q(x)$ eine im Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ postive, stetige und zweimal stetig differentiierbare Funktion bedeutet. Er wendet die Weinsteinsche Methode auf die Näherungsfunktionen

$$\eta_n = q^{-\frac{1}{4}} \sin n\pi \frac{\int_0^x \sqrt{q(v)}\,\mathrm{d}u}{\int_0^1 \sqrt{q(u)}\,\mathrm{d}u}$$

der Lösungen $y_n$ an. Sein Resultat ist die Abschätzung

$$\left| \left( \frac{n\pi}{\int_0^1 \sqrt{q(u)}\,\mathrm{d}u} \right)^2 + \frac{2}{\int_0^1 \sqrt{q(u)}\,\mathrm{d}u} \int_0^1 r\, q\, \eta_n^2\, \mathrm{d}x - \lambda_n \right| \leqq S_n \quad (2),$$

wo $S_n$ eine berechenbare Konstante bedeutet und der Kürze halber

$$r = \frac{1}{4}\frac{q''}{q^2} - \frac{5}{16}\frac{q'^2}{q^3}$$

gesetzt worden ist.

[1]) Eigenfrequenzen inhomogener Saiten. Z. angew. Math. Mech. Bd. 18 (1938), S. 177—185.

Anschließend daran beschäftigt er sich mit der Frage, in welchem Falle $S_n = 0$ ist, d. h. bei welcher Beschaffenheit der Funktion $q(x)$ die Eigenwerte $\lambda_n$ der Differentialgleichung (1) mittels der Formel (2) exakt berechenbar sind?

Er leitet ab, daß in diesem Falle $r = \text{const}$ ist, also $q(x)$ die Differentialgleichung

$$4\, q\, q'' - 5\, q'^2 = C\, q^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

befriedigen muß. Die Eigenwerte werden dann durch die Gleichung

$$\lambda_n = \left( \frac{n\pi}{\int_0^1 \sqrt{q(u)}\,\mathrm{d}u} \right)^2 + C$$

ausgedrückt. Für $C = 0$ findet er die Lösungen dieser Gleichung, nämlich $q = (a\,x + b)^{-4}$ und behauptet, daß im Falle $C \neq 0$ Lösungen von der Form $q = (\alpha\,x + \beta)^{-2}$ existieren. Die allgemeine Integration der Gleichung (3) ist ihm aber nicht gelungen.

Der Gegenstand dieser Note ist die Ableitung aller partikulären Lösungen der Differentialgleichung (3). Zu diesem Zwecke machen wir die Substitution

$$q = s^{-4},$$

die die Gl. (3) in die Gestalt

$$-16\, s'' = C\, s^{-3}$$

überführt. Wenn wir beide Seiten mit $s'$ multiplizieren, erhalten wir

$$-16\, s'\, s'' = C\, \frac{s'}{s^3}.$$

Diese Gleichung läßt sich schon einmal integrieren:

$$8\,(s')^2 = -\frac{C}{2}\frac{1}{s^2} + A.$$

Nach Multiplikation mit $s^2$ bekommen wir

$$-2\,(2\,s\,s')^2 = -\frac{C}{2} + A\,s^2.$$

Wenn wir wiederum eine neue Veränderliche $t = s^2 = q^{-\frac{1}{2}}$ einführen, so wird unsere Gleichung von der Gestalt

$$-2\,(t')^2 = -\frac{C}{2} + A\,t$$

sein; in dieser Form läßt sie sich aber durch Trennen der Veränderlichen integrieren. Ihr Integral ist für $A \neq 0$

$$t^{-2} = q = \left(\frac{A}{2}\right)^2 \frac{1}{\left\{ \frac{C}{4} - \left[ \frac{A}{4}(x+B) \right]^2 \right\}^2} \quad . \quad (4),$$

bzw. für $A = 0$

$$t^{-2} = q = \frac{4}{C\,(x+B)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5),$$

worin $B$ eine neue Integrationskonstante ist.

Aus Gl. (4) erhalten wir Erdélyi's Lösungen für den Fall $C = 0$, wenn wir in ihr $C$ gleich 0 setzen, während Gl. (5) die von Erdélyi gefundenen Lösungen für den Fall $C \neq 0$ liefert.

Es sei noch bemerkt, daß singuläre Lösungen unserer Differentialgleichung nicht existieren. Denn die notwendige Bedingung dafür, daß die im Koordinatensystem $x$, $y$, $z$ durch die Gleichungen

$$x = x$$
$$y = q(x, A, B)$$
$$z = q'(x, A, B)$$

definierten Kurven eine fokale Fläche mit endlichen $y$-Werten besäßen, ist nicht erfüllt.

Budapest. E. Makai. 370

**Annäherung der logarithmischen Spirale durch Kreisbogen.** Die logarithmische Spirale gilt in der Technik als eine der wichtigsten Kurven. Man hinterdreht nach ihr die Zähne von Fräsern und krümmt nach ihr bogenförmig geführte Blätter von Scheren. Fließfiguren bei statischen Festigkeitsversuchen von Rohren zeigen die Form einer logarithmischen Spirale. Weiter finden wir sie theoretisch wie praktisch bei vielen Bildern von Strömungsvorgängen z. B. Stromlinien, Leitblechen in Turbinen und Kreiselpumpen, Exponential- (Kurt von Sanden) Überfällen und Spritzrohren am Rundherd von Erzaufbereitungen.

Die Gleichung der logarithmischen Spirale in Polarkoordinaten $r$, $\varphi$ lautet

$$r = a\, e^{\operatorname{ctg} \tau \varphi} \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

darin ist $\tau$ der Winkel, unter dem die Spirale alle vom Mittelpunkt $O$ ausgehenden Halbstrahlen schneidet, gemessen zwischen Halbstrahl und der positiven Fortschreitungsrichtung der Kurve.

Im folgenden wird eine Näherungskonstruktion für die logarithmische Spirale gebracht, die rechnungsmäßig wie konstruktiv in ihrer kreisbogenförmigen Kurvenausführung[1]) viel vorteilhafter als (1) ist und dabei beliebig genaue Resultate gestattet.

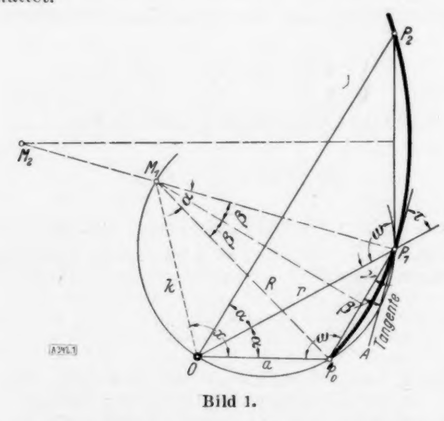



Bild 1.

Die Strecke $OP_0 = a$ und der Tangentenwinkel $\tau$ sind gegeben (s. Bild 1). Um den unter $\alpha$ verlaufenden Halbstrahl $r$ zu berechnen, ist zunächst nach dem Peripheriewinkelsatz

$$\sphericalangle O M_1 P_0 = \sphericalangle O P_1 P_0 = \pi - \alpha - \omega = \gamma \quad . \quad (2)$$

und

$$\sphericalangle P_0 O P_1 = \sphericalangle P_0 M_1 P_1 = \pi - \gamma - \omega = \alpha \quad . \quad (3).$$

Nach dem Tangentenwinkelsatz ist $\sphericalangle P_0 P_1 A$ im Punkt $P_1$ halb so groß wie der mit ihm auf dem Bogen $P_0 P_1$ stehende Zentriwinkel $P_0 M_1 P_1$, daher ist $\beta = \frac{\alpha}{2}$ und $\sphericalangle A P_1 O$

$$\tau = \gamma + \frac{\alpha}{2} \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Mit Gleichung (4) sind alle Winkel im Dreieck $O P_0 P_1$ bestimmt und man kann jeden Fahrstrahl der logarithmischen Spirale beliebig genau berechnen, wenn man den Durchgang der Spirale im Punkt $P_1$ als ein Kreisbogenstück mit dem Mittelpunkt in $M_1$ ansieht. Ist ein unter $\sphericalangle \alpha$ im Intervall 0—90° verlaufender Halbstrahl $r$ einer logarithmischen Spirale ($a$ und $\tau$ fest) zu berechnen, so kann man statt den Halbstrahl nach (1) zu berechnen, nach dem Sinussatz angewendet auf Dreieck $O P_0 P_1$ setzen

$$r = a \frac{\sin \omega}{\sin \gamma};$$

da nun aber $\omega = \tau + \frac{\alpha}{2}$ und $\gamma = \tau - \frac{\alpha}{2}$ ist, wird

$$r = a \frac{\sin \tau + \frac{\alpha}{2}}{\sin \tau - \frac{\alpha}{2}} \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Gleichung (5) liefert für (1) nur grob genäherte Resultate, zur besseren Annäherung wird (5) wiederholt angewendet. Es wird dann

$$e^{\operatorname{ctg} \tau \alpha} = \lim_{n \to \infty} \left[ \frac{\sin \tau + \frac{\alpha}{2n}}{\sin \tau - \frac{\alpha}{2n}} \right]^n \approx \left[ \frac{\sin \tau + \frac{\alpha}{2n}}{\sin \tau - \frac{\alpha}{2n}} \right]^n \quad (6).$$

Darin werden $\tau$ und $\alpha$ in Graden addiert und dann der Quotient der Sinuswerte gebildet. Je nach der verlangten Genauigkeit wird ein entsprechend großes $n$ genommen. Auf diese Weise kann man nach (6) sehr bequem rechnen. In Zahlentafel 1 sind die Abweichungen für die in Frage kommenden Werte $n$ angegeben.

Zahlentafel 1.

| $\frac{\alpha}{\tau}$ | Abweichungen nach (6) in % | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 5$ | $n = 10$ | $n = 50$ |
| ≦ 1,0 | 0,0 .. 10,2 | 0,0 .. 2,20 | 0,0 ... 0,30 | 0,0 ... 0,074 | 0,0 ... 0,00 |

Wird $\alpha > \frac{\pi}{2}$, so muß unterteilt und allgemein gesetzt werden

$$\overline{O P_x} = a \left(e^{\operatorname{ctg} \tau \alpha}\right)^x \approx a \left( \frac{\sin \tau + \frac{\alpha}{2n}}{\sin \tau - \frac{\alpha}{2n}} \right)^{nx} \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Für die zeichnerische Konstruktion der logarithmischen Spirale lassen wir Halbstrahlen unter $O$, $\alpha$, $2\alpha$, ... verlaufen und berechnen darauf nach (6) ihre Länge oder tragen nach (4) alle Dreieckswinkel zeichnerisch an, wodurch die Kurvenpunkte $P_0$, $P_1$, $P_2$ ... entstehen. Die Spirale soll nun zwischen $P_0$ und $P_1$, $P_1$ und $P_2$ ... stückweise durch Kreisbögen ersetzt und somit bequemer als bei punktweise durchgeführter Berechnung mit dem Kurvenlineal gezeichnet werden. Da alle Dreiecke $O P_0 P_1$, $O P_1 P_2$ ... einander ähnlich sind, braucht man nur die Angabe der Konstruktion des Bogens $P_0 P_1$ machen.

[1]) Ein zeichnerisches Näherungsverfahren für die logarithm. Spirale ist in der „Deutschen Mathematik" Bd. 3 (1938) S. 269 bis 272 gegeben.

Der dem Dreieck $O P_0 P_1$ umbeschriebene Kreis schneidet die auf $P_0 P_1$ nach der Seite von $O$ hin errichtete Mittelsenkrechte in $M_1$. Der Kreis um $M_1$ mit $M_1 P_0 = M_1 P_1$ als Radius wird als Näherung der Spirale zwischen den Punkten $P_0$ und $P_1$ benutzt. Für die Konstruktion beachtet man, daß die Kreisbögen $P_0 P_1$, $P_1 P_2$ ... mit stetiger Tangente aneinander schließen sollen. Da $\sphericalangle A P_1 P_0 = \beta$, ist $\sphericalangle P_0 M_1 P_1 = \sphericalangle P_0 O P_1$. Der Mittelpunkt $M_1$ liegt also auf dem Kreis über $P_0 P_1$ als Sehne mit dem Peripheriewinkel $\alpha$.

Genauigkeitsnachweis: Bei der Berechnung der logarithmischen Spirale nach Gleichung (1) und der hier neu abgeleiteten Gleichung (6) erlangt man eine beliebig hohe Genauigkeit durch Benutzung eines entsprechend hohen Exponenten.

Eine ebenso hohe Genauigkeit in der zeichnerischen Konstruktion erhält man, wenn die Dreiecke nach den errechneten Halbstrahlen gebildet werden.

Wird die Kurve konstruktiv nach den Winkeln (4) entwickelt, so schneidet die Näherungskurve $C$ die Halbstrahlen $O P_0$, $O P_1$ ... nicht unter dem Winkel $\tau$ wie die Spirale $S$, sondern unter $\pi - \omega - \beta$, mithin ist

$$\Delta = \pi - \omega - \frac{\alpha}{2} - \tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

ein Maß für die Abweichungen dieses Bogenstückes. Die Größe dieser Abweichung ist abhängig von dem gewählten $\sphericalangle \alpha$. Für $\alpha = \frac{1}{2}\tau$ wird der Fehler bis $2^0$ groß. Eine solche Genauigkeit genügt meistens für die Praxis. Wenn man $\alpha$ noch kleiner wählt, so verringert sich die Abweichung zusehends. Bei dieser Konstruktion schneidet $C$ nun $S$ unter dem Winkel $\Delta$. Für $\varphi = O$ liegt $S$ deshalb von $O$ aus gesehen außerhalb $C$, ebenso wegen der Ähnlichkeit für $\varphi = \alpha + O$. Daher muß für $\varphi = \alpha - O$ die Spirale von $O$ aus gesehen innerhalb $C$ liegen. Zwischen $P_0$ und $P_1$ müssen sich die Kurven also mindestens noch einmal schneiden. Dieser Schnittpunkt liegt stets bei $\frac{1}{2}\alpha$ und bedingt dadurch eine sehr gute Annäherung.

Beweis: Da $\sphericalangle O P_0 M_1 = \omega - \frac{\pi}{2} + \beta$, so folgt

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Bezeichnet $R$ den Kreisradius $\overline{M_1 P_0} = \overline{M_1 P_1}$, so folgt nach dem Sinussatz für Dreieck $O M_1 P_0$

$$R = a \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\tau - \frac{\alpha}{2}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

und

$$k = -a \frac{\cos \tau}{\sin\left(\tau - \frac{\alpha}{2}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Der Abstand des Spiralenpunktes $r$, $\varphi$ vom Punkte $M_1$ sei $\bar{r}$. Dann ist

$$\bar{r}^2 = k^2 + r^2 - 2kr\cos(x - \varphi) \quad . \quad . \quad (12).$$

Für $\varphi = \frac{1}{2}\alpha$ verschwindet das letzte Glied auf der rechten Seite. Es ist ferner nach (1) und (5)

$$r = a \sqrt{\frac{\sin\left(\tau + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\tau - \frac{\alpha}{2}\right)}} \quad \text{für } \varphi = \frac{\alpha}{2} \quad . \quad (13),$$

woraus

$$\bar{r} = a \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\tau - \frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{für } \varphi = \frac{\alpha}{2} \quad . \quad (14)$$

und mit (10) die Behauptung folgt.

$R$ ist auch ein mittlerer Wert der Krümmungsradien

$$\delta_0 = \frac{a}{\sin \tau}$$

und

$$\delta_1 = a \frac{\sin\left(\tau + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\tau - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\tau} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

in den Punkten $P_0$ und $P_1$, und die Stellen $\varphi = O$, $\frac{1}{2}\alpha$, $\alpha$ sind im Intervall $O \leqq \varphi \leqq \alpha$ die einzigen, an denen $S$ und $C$ sich beim zeichnerischen Konstruktionsverfahren schneiden.

Die bei der Berechnung von Leitblechen in Turbinen immer erforderliche Kurvenlänge $b$ der logarithmischen Spirale, die bekanntlich durch Integration bestimmt werden kann, wird nach (10)

$$b \approx \frac{R \cdot \pi \cdot \alpha^0}{180} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

mit einer für die Praxis hinreichenden Genauigkeit.

Die eingangs erwähnte und bisher in der Praxis schon bewährte Näherungskonstruktion durch Kreisbögen ist hier in eine sowohl in Rechnung wie Konstruktion beliebig genaue Kreisbogenkonstruktion übergeführt worden. Durch den mit Formel (4) gegebenen Fortfall der Zahlentafel ist die Beschränkung auf die dort angeführten Winkel aufgehoben. Diese können für jede Größe der logarithmischen Spirale ohne weiteres bestimmt werden.

Vergleicht man die logarithmische Spirale mit der hier abgeleiteten Näherung, so ergeben sich der ersteren gegenüber beachtenswerte Vorteile: einmal kann ohne Logarithmen gerechnet werden, zum anderen ist bei logarithmischer Berechnung hier weniger Rechenarbeit erforderlich als nach (1). Hinzu kommt die nach (16) einfache näherungsweise Berechnung der Kurvenlänge und des Inhalts der logarithmischen Spirale.

Berlin. H. Meincke. 342

**Eine Schieberanordnung für die Schlüsselgleichung $f_1(\varphi(\alpha) + \psi(\beta)) + f_2(\gamma) = f_3(\alpha, \beta, \gamma)$, wobei nur das Endresultat abzulesen ist.**

Die obige Schlüsselgleichung — $f_1$, $f_2$, $\varphi$, $\psi$ beliebige „gesunde" Funktionen — setzt im allgemeinen der Behandlung mit dem Rechenschieber Widerstand entgegen, da sie Ablesung eines Zwischenresultats verlangt. Diese Unbequemlichkeit — auch Fehlerquelle — wird durch die hier beschriebene Anordnung von zwei Schiebern im rechten Winkel in Verbindung mit einer Kurvenschablone vermieden.

$\varphi(\alpha)$ ist auf der festen Skala (I) eines Rechenschiebers 1 angebracht, $\psi(\beta)$ auf dem beweglichen Teil II (Zunge 1). Wird zur Abkürzung $\varphi + \psi = u$ gesetzt, so ist die $u$-Skala mit der $\varphi$-Skala zusammenfallend zu denken. $f_1(u)$ wird als Ordinate über $u$ konstruiert. (Bei der praktischen Ausführung wird die Kurve als Blechschablone geschnitten und an den festen Teil 1 des Schiebers 1 geschraubt.) Mit dem Ende $C$ der Zunge 1 ($\psi$-Skala) ist im rechten Winkel zu dieser der feste Teil IV des Schiebers 2 fest verbunden, so daß er sich bei Verschiebung der Zunge 1 (Bild 1) auf und ab bewegt.

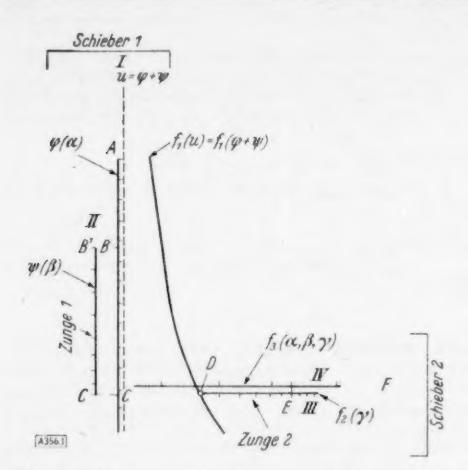



Bild 1. Der besseren Übersicht wegen wurden die Skalenträger im Bild mit größerem Abstand gezeichnet. In Wirklichkeit schließen $\varphi$ und $\psi$ Skala (in Bild I und II) ebenso $f_2$ und $f_3$ Skala (im Bild III und IV) dicht aneinander (als Zunge und fester Teil von Schieber 1 bzw. 2), per punktierte $u$-Träger fällt mit I zusammen.

Auf Zunge 2 des Schiebers 2 befindet sich die $f_2$-Skala, auf dem festen Teil IV die $f_3$-Skala. (Nötigenfalls können die Skalen gleich und gegenläufig aufgetragen werden.)

Die Rechnung geht so vor sich: $\varphi\,(\alpha)$ auf I aufsuchen (im Beispiel $= AB$), $\psi\,(\beta)$ auf II ($= B'C$) $B$ auf $I$ gegenüberstellen, dabei verschiebt sich der feste Teil IV des Schiebers 2 in die Lage $C-F$. Auf der gedachten $u$-Skala würde dann $\varphi + \psi = u$ abzulesen sein ($= AC$), wo die Kurvenordinate $CD = f_1\,(u)$ ist. Jetzt wird die Zunge 2 eingeschoben bis zur Berührung (Anschlag) mit der die Kurve $f_1$ darstellenden Blechschablone. $f_2$ ($= DE$) auf Zunge 2 gibt auf dem festen Teil IV des Schiebers 2 das Resultat $f_3$ ($= CE$).

Bei der mechanischen Durchbildung des Systems könnte Zunge 2 zwangsläufig an der Kurve $f_1\,(u)$ entlang geführt werden, wenn Zunge 1 eingestellt wird. Bei einer behelfsmäßigen Ausführung wird man jedoch die ganze Anordnung auf Millimeterpapier zeichnen, Zunge 1 und fester Teil des Schiebers 2 werden durch einen rechten Winkel aus Millimeterpapier, Zunge 2 durch einen Streifen ebensolchen Papiers ersetzt.

Von den zahlreichen Ausdrücken, die auf obige Schlüsselgleichung zurückgeführt werden können, seien hier nur die Exponentialgesetze besonders erwähnt.

Böblingen. H. Schminke. 356

**Bemerkung zum Buffonschen Nadelproblem.** Bei diesem Problem handelt es sich bekanntlich um folgendes [1]): Man wirft auf eine ebene horizontale Platte, auf welcher Parallelen in gleichem Abstand $a$ gezogen sind, eine dünne Nadel von der Länge $l < a$ und fragt nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß hierbei die Nadel auf eine der Parallelen zu liegen kommt; vergleiche Bild 1, wo $M\,(x, y)$ der Mittelpunkt der Nadel und $\vartheta$ ihre Neigung gegen die $x$-Achse ist

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}\right).$$

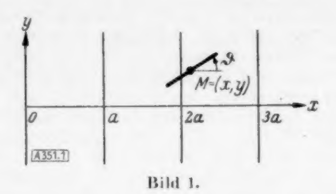



Bild 1.

Das Problematische an dieser Aufgabe liegt nun in der Frage: wie soll man bzw. wie hat man die möglichen Nadellagen „abzuzählen", oder anders gesprochen, welche Wahrscheinlichkeitsdichte ist zu nehmen? — Offenbar geht in das Verhältnis der günstigen zu den möglichen Fällen die $y$-Koordinate nicht ein. Wählen wir dann mit Buffon als Parameter $x$ und $\vartheta$, und zählen gemäß

$$\int \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,\vartheta$$

ab, wählen also die Wahrscheinlichkeitsdichte konstant, so erhalten wir bekanntlich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $W$

$$W = \frac{2}{\pi}\,\frac{l}{a}.$$

So plausibel diese Abzählung auch erscheinen mag, so erscheint es zunächst nicht ausgeschlossen, ob es nicht auch andere, vielleicht ebenso plausible Abzählungen

$$\int w\,(x, \vartheta)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,\vartheta$$

beziehungsweise, wenn wir vorübergehend die $y$-Koordinate mitnehmen

$$\int w\,(x, y, \vartheta)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gibt, wo $w\,(x, \vartheta)$ beziehungsweise $w\,(x, y, \vartheta)$ nicht konstant ist. Eine Begründung, warum also $w$ konstant, das heißt also gemäß $\int \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,\vartheta$ bzw. $\int \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,\vartheta$ abzuzählen ist, muß erbracht werden [2]).

Eine solche Begründung scheint uns durch die folgende Bemerkung möglich, welche sinngemäß auch für andere ähnliche Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeiten gilt. Stellen wir nämlich an das Maß (1) die natürliche Forderung [3]), daß es für jeden Nadelbereich, oder wie wir uns anschaulich ausdrücken wollen, für jeden „Nadelhaufen" $\mathfrak{B}$ invariant gegenüber den Bewegungen der Ebene ist, so ist $w$ notwendig konstant. Nehmen wir nämlich durch eine solche Bewegung unseren Nadelhaufen $\mathfrak{B}$ mit, so entsteht aus ihm ein neuer Haufen $\mathfrak{B}^*$ vermöge der Zuordnung

$$\left.\begin{aligned} x^* &= -a^* + x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y^* &= -b^* - x\sin\alpha + y\cos\alpha \\ \vartheta^* &= \quad \alpha \qquad\qquad\qquad\quad + \vartheta \\ & \qquad a^*, b^*, \alpha \text{ Konstante} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (2)$$

[1]) Vgl. z. B. E. Czuber: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig und Berlin 1938, 1. Bd. 5. Aufl., S. 98.

[2]) Vgl. hiermit auch die Note des Verf. „Bemerkungen zu Mises' Behandlung des Nadelproblems von Buffon", Deutsche Mathematik Bd. 6 (1941), Heft 1, S. 108 bis 113, und speziell S. 112 Abs. 7, wo, um auf $w = \text{const}$ zu schließen, die Zuflucht zu dem Prinzip vom mangelnden Grunde genommen werden mußte.

[3]) Hierüber und über die nun folgende kleine Rechnung siehe auch W. Blaschke: Vorlesungen über Integralgeometrie, Erstes Heft. Leipzig und Berlin (1935), S. 5. Übrigens ist die oben angegebene Abzählung vermöge $\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,\vartheta$ in der Sprache von Blaschke nichts anderes als die Dichte der ungerichteten Linienelemente bzw. mit 2 multipliziert die kinematische Dichte Poincarés.

und unsere Invarianzforderung ergibt

$$\int_{\mathfrak{B}} w(x,y,\vartheta)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\mathfrak{B}^*} w(x^*,y^*,\vartheta^*)\,\mathrm{d}x^*\,\mathrm{d}y^*\,\mathrm{d}\vartheta^* .$$

Transformiert man hier das rechte Integral vermöge (2) auf den alten Bereich $\mathfrak{B}$ zurück, und beachtet, daß

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}x^*\,\mathrm{d}y^*\,\mathrm{d}\vartheta^*$$

ist, so erhalten wir

$$\int_{\mathfrak{B}} w(x,y,\vartheta)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\mathfrak{B}} w(x^*,y^*,\vartheta^*)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\vartheta$$

und mithin, da $\mathfrak{B}$ beliebig gewählt werden kann,

$$w(x,y,\vartheta) = w(x^*,y^*,\vartheta) \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Da man durch geeignete Wahl der Bewegung d. h. der Konstanten $a^*, b^*, \alpha$ jede Nadellage $x, y, \vartheta$ in eine feste $x^*, y^*, \vartheta^*$ überführen kann, so folgt aus (3) in der Tat

$$w(x,y,\vartheta) = \text{const.}$$

Breslau. Ernst Mohr. 351.

**Bemerkung über ein von W. Höffding vorgeschlagenes, maßstabsinvariantes Korrelationsmaß.** In Heft 6 (1941) S. 364—379 dieser Zeitschrift habe ich das Korrelationsproblem der Statistik als Eigenwertproblem einer Fredholmschen Integralgleichung begründet und dabei auch die Rolle der klassischen Korrelationsmaße, nämlich des Korrelationskoeffizienten $r$ Gl. (5), der beiden Pearsonschen Korrelationsverhältnisse $k^2{}_{yx}$ bzw. $k^2{}_{xy}$ Gl. (7) und des Pearsonschen Kontingenzmaßes $f^2$ Gl. (8) im Rahmen dieser allgemeinen Theorie klargestellt. Nach Abschluß jener Arbeit wurden mir zwei neue, einschlägige Untersuchungen von Wassilij Höffding bekannt:

1. Maßstabinvariante Korrelationstheorie, Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin, Bd. 5, Heft 3, Berlin (1940) — und als Fortsetzung
2. Maßstabinvariante Korrelationsmaße für diskontinuierliche Verteilungen, Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung, Bd. 7, Heft 2 (1941).

Es dürfte von Interesse sein, ebenso wie die genannten alten Korrelationsmaße auch die Höffdingschen Vorschläge und Ergebnisse vom Standpunkt der Eigenwerttheorie aus zu betrachten.

Das Hauptergebnis meiner Theorie ist die eng mit dem kleinsten Eigenwert einer Integralgleichung zusammenhängende Maximalkorrelation

$$K = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(y)\, w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right| = \text{Maximum},$$

die durch ihr Verschwinden ($K = 0$) mit Sicherheit anzeigt, wenn die beiden Veränderlichen $x$ und $y$ unabhängig voneinander sind, und die anderseits mit Sicherheit den Wert $K = 1$ annimmt, wenn zwischen ihnen vollständige Abhängigkeit besteht. Entscheidend (und für die praktische Berechnung von $K$ erschwerend) ist dabei, daß als Prüffunktionen $f(x)$ und $g(y)$ normierte Eigenfunktionen des kleinsten Eigenwerts der Integralgleichung zu verwenden sind. Gegenüber beliebigen Merkmaltransformationen $X = X(x)$, $Y = Y(y)$ ist die Größe $K$ unempfindlich.

Das Höffdingsche maßstabsinvariante Korrelationsmaß, von ihm als normierter Korrelationskoeffizient $\varrho$ bezeichnet, ist nun nichts anderes als der Wert des obigen Doppelintegrals auf Grund der die Normierungs- und Orthogonalisierungsbedingungen (10) und (12) erfüllenden Prüffunktionen

$$f(x) = \sqrt{3}\left(2\int_{-\infty}^{x} w_1(x)\,\mathrm{d}x - 1\right),$$

$$g(y) = \sqrt{3}\left(2\int_{-\infty}^{y} w_2(y)\,\mathrm{d}y - 1\right).$$

Für diese willkürlich gewählten Funktionen nimmt der obige Ausdruck im allgemeinen natürlich nicht seinen Größtwert an; daher ist $\varrho^2 \leqq K^2$.

Man kann den Vorgang bei Höffding weniger formal auch auf folgende Weise deuten. Höffding führt eine Merkmaltransformation aus, derart, daß die beiden eindimensionalen Verteilungen $w_1(x)$ und $w_2(y)$ gleichförmige werden mit der Häufigkeitsdichte Eins im Bereich zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$. Wählen wir statt dessen, um besseren Anschluß an die Gleichungen meines früheren Aufsatzes zu gewinnen, das Intervall zwischen $-1$ und $+1$, so lautet die erforderliche Transformation

$$X(x) = 2\int_{-\infty}^{x} w_1(x)\,\mathrm{d}x - 1,$$

$$Y(y) = 2\int_{-\infty}^{y} w_2(y)\,\mathrm{d}y - 1.$$

und durch sie wird

$$\left.\begin{aligned} \overline{w}_1(X) &= \frac{1}{2} \\ \overline{w}_2(Y) &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \text{ für } \left\{\begin{aligned} -1 \leqq X \leqq +1 \\ -1 \leqq Y \leqq +1 \end{aligned}\right\}, \text{ sonst Null.}$$

Nach Ausführung dieser Transformation sind die Orthogonalpolynome (26) des Problems bis auf konstante Normierungsfaktoren die Legendreschen Polynome $P_n(z)$. Es ist für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\varphi_n(X) = \sqrt{2n+1}\, P_n(X),$$

$$\psi_n(Y) = \sqrt{2n+1}\, P_n(Y).$$

Wir erhalten damit das methodisch bemerkenswerte Ergebnis, daß man bei einer beliebigen geometrischen Verteilung $w(x,y)$ durch Anwendung dieses Kunstgriffs stets mit einem einzigen bestimmten Funktionensystem, z. B. dem der Legendreschen Kugelfunktionen auskommt. Bei arithmetischen Verteilungen allerdings gelingt diese Zurückführung auf ein einheitliches Funktionensystem nicht.

Auf Grund der Transformation tritt an die Stelle der Verteilung $w(x,y)$ eine neue $\overline{w}(X,Y)$, für die

$$w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = w(X,Y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}Y$$

ist. Werden für das transformierte Variationsproblem

$$K = \left| \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(X)\, g(Y)\, \overline{w}(X, Y)\, \mathrm{d}X\, \mathrm{d}Y \right| = \text{Maximum}$$

als einfachste Prüffunktionen $f(X)$ und $g(Y)$ die Funktionen

$$\varphi_1(X) = \sqrt{3}\, P_1(X) = \sqrt{3}\left(2\int_{-\infty}^{x} w_1(x)\, \mathrm{d}x - 1\right),$$

$$\psi_2(Y) = \sqrt{3}\, P_1(Y) = \sqrt{3}\left(2\int_{-\infty}^{y} w_2(y)\, \mathrm{d}y - 1\right)$$

verwendet, so entsteht die Höffdingsche Größe $\varrho$

$$\varrho = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \varphi_1(X)\psi_1(Y)\, \overline{w}(X, Y)\, \mathrm{d}X\, \mathrm{d}Y$$

$$= 12 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{x} w_1(x)\, \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{y} w_2(y)\, \mathrm{d}y - \frac{1}{2}\right) \cdot w(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

Die Vorzüge und Mängel von $\varrho$ als Korrelationsmaß liegen nun klar zutage. Höffding kommt es besonders auf die Invarianz gegenüber monotonen Merkmaltransformationen der Ausgangsverteilung an. Diese ist durch die beschriebene Transformation von $w_1(x)$ und $w_2(y)$ auf Gleichverteilung gewährleistet. Dagegen hat $\varrho$ mit dem Korrelationskoeffizienten $r$ die Mängel gemein, daß aus $r$ bzw. $\varrho = 0$ nicht auf Unabhängigkeit der beiden Merkmale geschlossen werden kann — worauf auch Höffding ausdrücklich hinweist — und daß im Falle vollständiger Abhängigkeit $\varrho$ ebensowenig wie $r$ stets den Wert Eins annimmt.

Während sicher $|\varrho| \leq K$ ist, kann sowohl $|\varrho| < |r|$ als auch $|\varrho| > |r|$ sein. Dies hängt davon ab, ob für die Ausgangsverteilung $w(x, y)$ oder für die transformierte Verteilung $\overline{w}(X, Y)$ die Regressionslinien besser dem Normalfall der Geradlinigkeit entsprechen. Denken wir uns z. B. eine Ausgangsverteilung mit geraden, nahezu zusammenfallenden Regressionslinien und demgemäß einem Korrelationskoeffizienten $r$ nahezu gleich Eins. In diesem Fall werden im allgemeinen nach der Transformation die Regressionslinien für $X$ und $Y$ weniger gut geradlinig sein und daher $|\varrho| < |r|$ ausfallen. Diese Überlegung gibt aber zu starken Bedenken gegen die Verwendung der Größe $\varrho$ als Korrelationsmaß Anlaß; denn die im angenommenen Fall durch $r$ nachgewiesene große Abhängigkeit besteht zu Recht, auch wenn sie bei der Betrachtung von $\varrho$ nicht in Erscheinung tritt.

Die Ursache dieser Schwäche der Größe $\varrho$ liegt in der Sonderstellung einer bestimmten Verteilung, nämlich z. B. der Gleichverteilung für $w_1$ und $w_2$ innerhalb der Höffdingschen Theorie. So sehr dem von Höffding vertretenen Grundsatz, von einem idealen Korrelationsmaß Maßstabinvarianz zu fordern, zugestimmt werden kann, ist doch festzustellen, daß $\varrho$ die übrigen, an ein solches zu stellenden Anforderungen nicht erfüllt. Daß es möglich ist, diese Schwierigkeiten zu beheben, zeigt die Maximalkorrelation $K$, die ohne Preisgabe anderer Vorzüge auch invariant gegenüber Merkmaltransformationen ist.

Veranlaßt vor allem durch die Unmöglichkeit, von $\varrho = 0$ auf Unabhängigkeit zu schließen, widmet Höffding seine Untersuchungen noch anderen maßstabsinvarianten Korrelationsmaßen, nämlich dem Pearsonschen Kontingenzmaß und einer interessanten neuartigen Größe, dem von ihm als Abhängigkeitsmaß bezeichneten $\Phi^2$, in unserer Schreibweise.

$$\Phi^2 = 90 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} (w(x,y) - w_1(x)\, w_2(y))\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\right]^2 \cdot w_1(x)\, w_2(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

Man kann nach der Transformation auf $X$ und $Y$ zunächst den Integranden nach den Polynomen $\varphi_n(X)$ und $\psi_n(Y)$ entwickeln, denn nach Gl. (29) ist allgemein

$$w(x, y) - w_1(x)\, w_2(y) = \sum_{i, j = 1}^{\infty} c_{ij}\, \varphi_i(x)\, \psi_j(y) \cdot w_1(x)\, w_2(y)$$

mit $c_{11} = r$, und in diesem besonderen Fall

$$\overline{w}(X, Y) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \sum_{i, j = 1}^{\infty} c_{ij} \sqrt{2i+1} \cdot \sqrt{2j+1}\, P_i(X) \cdot P_j(Y),$$

wobei $c_{11} = \varrho$ ist. Darauf kann man die vorgeschriebene Integration mit den Grenzen $-1$ und $X$ bzw. $Y$ durchführen mittels der für die Legendreschen Polynome geltenden Integralformel

$$\int_{-1}^{z} P_n(z)\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2n+1}\,(P_{n+1}(z) - P_{n-1}(z)), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

und endlich führt die Anwendung der Vollständigkeitsrelation zur Darstellung für $\Phi^2$ als quadratische Form der Koeffizienten $c_{ij}$. Der Anfang dieser Entwicklung lautet

$$\Phi^2 = 90 \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} (\ldots)^2\, \overline{w}_1(X)\, \overline{w}_2(Y)\, \mathrm{d}X\, \mathrm{d}Y$$

$$= \frac{5}{8} c_{11}^2 + \frac{1}{8}(c_{12}^2 + c_{21}^2) + \frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\, c_{13} - c_{11}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\, c_{31} - c_{11}\right)^2 + \frac{1}{40} c_{22}^2 + \cdots.$$

Es ist mir nicht geglückt, $\Phi^2$ etwa ähnlich wie das Pearsonsche Kontingenzmaß mit den Größen der Fredholmschen Integralgleichung in Zusammenhang zu bringen, und daraus Beziehungen zwischen $\Phi$ und den klassischen Korrelationsmaßen oder der Maximalkorrelation zu gewinnen. Sofort angeben läßt sich dagegen wegen $c_{11} = \varrho$ die Abschätzung

$$\Phi^2 \geqq \frac{5}{8}\varrho^2 \quad \text{oder} \quad \Phi \geqq 0{,}7906\, |\varrho|\,,$$

die auch von Höffding mitgeteilt worden ist. Von Interesse wäre vor allem die Frage, ob $\Phi \geq K$ sein kann oder sein muß. Ob dies eintreten kann, wurde nicht entschieden. Daß dies nicht der Fall

sein muß, zeigen Beispiele, die Höffding in seiner zweiten Arbeit mitteilt, und bei denen $\Phi$ kleiner als $\varrho$ und beide kleiner als der Korrelationskoeffizient $r$ ausgefallen sind, während $K$ selbstverständlich sogar größer als $r$ ist.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß bei der Anwendung der Höffdingschen Korrelationstheorie auf arithmetische Verteilungen grundsätzliche Schwierigkeiten auftreten, weil diskontinuierliche Verteilungen sich nicht in Gleichverteilung verwandeln lassen. Diese Schwierigkeit, mit der sich Höffding in seiner zweiten Arbeit auseinandersetzt, besteht innerhalb der Eigenwerttheorie der Korrelation nicht; vielmehr tritt dort lediglich ein Ersatz der Integralgleichungen durch lineare Gleichungssysteme ein.

Eßlingen. Hans Gebelein. 371

# BUCHBESPRECHUNGEN

LUDWIG **FISCHER,** Die unabzählbare Menge, 2. Teil von „Grundlagen der Philosophie und der Mathematik". V + 57 S. Leipzig 1942, Felix Meiner Verlag. Preis brosch. 2,80 M.

Der Verfasser hat sich zum Ziele gesetzt, die üblichen Nachweise für überabzählbare Mengen zu entkräften. Nun gibt es bekanntlich philosophische Einstellungen zur Mathematik, die Überabzählbarkeit ablehnen. Verschiedene mengentheoretische Operationen und Begriffsbildungen verlieren für diese Einstellungen — z. B. den Intuitionismus — in entscheidenden Punkten ihren Sinn. Der Verfasser unternimmt demgegenüber unter anderem den Versuch, direkte Fehler in den Diagonalverfahren durch Überlegungen aufzuzeigen, die, soweit sie den Anspruch mathematischer Argumentation erheben, auf Mißverständnissen beruhen. Dabei wird an einigen Stellen auf ein von Null verschiedenes Unendlichkleines (Abstandswert von „Urlücken" im Kontinuum u. a.) als „logisches Korrelat des Unendlichgroßen" zurückgegriffen.

Potsdam. Arnold Schmidt. 360

Prof. Dott. DOMENICO **ARGENTIERI,** Ottica Idustriale. XXXI + 687 S. m. 83 Fig., 4 Taf. u. 3 Tabellen. Mailand 1942—XX, Verlag Ulrico Hoepli. Preis geb. 48 Lire.

Ein von einem ersichtlich großen Lehrtalent in klarer und lebhafter Darstellung geschriebenes und gut und übersichtlich ausgestattetes Werk von nahezu 700 Seiten in Taschenbuchformat. Während sich die deutschen Bücher meist auf die analytische Entwicklung beschränken und den Anfänger in einer Unzahl von Formeln hilflos sitzen lassen, gibt der Autor die wichtigsten Formeln der theoretischen Dioptrik, der trigonometrischen Durchrechnung und der Wellenoptik und Beugung, mit besonderer Berücksichtigung der Korrektur und Einstellung für beste Bildschärfe, ohne Herleitung an, zeigt aber dafür von Anfang an, wie man sie zur Synthese optischer Systeme verwendet. Es wird nicht nur dem Praktiker durch seinen Inhalt, sondern auch dem Theoretiker durch die Art der Darstellung gute Dienste tun. Besonders hervorgehoben sei, daß es dem Autor durch geschickte Substitutionen gelang, die langatmigen Seidelschen Bildfehlerausdrücke dünner Linsen für numerische Rechnungen zweckmäßig zu vereinfachen.

München. Staeble. 375

P. **RAETHJEN,** Einführung in die Physik der Atmosphäre, Bd. 1. Statik und Thermodynamik. XII + 126 S. m. 25 Abb. Leipzig und Berlin 1942, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 8 M.

Der Verfasser hat es sich zur Aufgabe gemacht, die physikalischen Grundlagen der Meteorologie elementar, aber exakt und gründlich darzustellen und hat dabei ein besonders in didaktischer Hinsicht ausgezeichnetes Lehrbuch geschaffen, wie es bisher in der meteorologischen Literatur fehlte.

Die Voraussetzungen an mathematischen und physikalischen Kenntnissen, auf denen sich das Lehrbuch aufbaut, sind möglichst gering gehalten. Es verlangt aber von dem Studenten physikalisches Denken und erzieht ihn dazu. Das Buch kann deshalb nicht leicht gelesen, sondern nur durchgearbeitet werden. Das ist bei der Fülle des Wissenstoffes, der hier in kürzester Form gebracht wird, nicht anders zu erwarten.

Das Studium des Buches wird durch die außerordentlich übersichtliche Einteilung des Textes sehr erleichtert. Fast in jedem Kapitel kehrt in enger logischer Verknüpfung die Reihenfolge „Experiment", „Theorie", „Satz", „Übungsaufgabe" wieder. Die Übungsaufgaben vertiefen und beleben das Studium und ermöglichen dem Studenten eine Selbstbeurteilung.

Es ist sehr zu wünschen, daß dieses Lehrbuch, das den Bedürfnissen der Studenten so glänzend angepaßt ist, weiteste Verbreitung findet.

Prag. W. Findeisen. 354

Dr. WOLFGANG **RIEZLER,** Dozent a. d. Univ. Bonn, Einführung in die Kernphysik. (Meyers Kleine Handbücher, Bd. 6a.) 2. erweit. Aufl. 217 S. Leipzig 1942, Verlag Bibliographisches Institut A.-G. Preis geb. 2,60 M.

Dr. WOLFGANG **RIEZLER,** Dozent a. d. Univ. Bonn, Tabellen und Tafeln zur Kernphysik. (Meyers Kleine Handbücher, Bd. 6b.) Ergänzungsband zur Einführung in die Kernphysik. 48 S. m. 7 Taf. Leipzig 1942, Verlag Bibliographisches Institut A.-G. Preis geb. 2,60 M.

Schon die erste Auflage fiel auf als kurze, klare, verständliche, nicht viel besondere Fachkenntnisse voraussetzende, dabei zuverlässige Einführung in die Kernphysik. Entsprechend den zahlreichen inzwischen erreichten Fortschritten ist die zweite Auflage ergänzt; der Abschnitt über die Kernreaktionen ist umgearbeitet worden, natürlich ist auch die Kernspaltung eingefügt. Die Tabellen sind auf den neuesten Stand gebracht und viel umfangreicher geworden; besonders die Tabelle über die künstlichen radioaktiven Stoffe sei hervorgehoben. Die Haupttabellen sind in dem zweiten Bändchen zusammengestellt; der wichtigste Inhalt der Tabellen ist in sieben mehrfarbigen Tafeln noch einmal dargestellt. In nach Protonenzahl und Neutronenzahl fortschreitenden Schaubildern sind die Isotopie- und Stabilitätsverhältnisse aller bekannten Kerne, die künstlichen Umwandlungen durch $\alpha$-Teilchen, Deuteronen, Protonen, Neutronen, $\gamma$-Strahlen und die Kernspaltungen sehr übersichtlich und einprägsam aufgetragen. Die Bändchen können zur Einführung, die Tabellen und Tafeln auch zum Nachschlagen für den forschenden Kernphysiker selbst sehr empfohlen werden.

Leipzig. F. Hund. 359

# NACHRICHTEN

**Arbeitstagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in München.**

Die ursprünglich für den 15. und 16. Mai 1942 geplante Arbeitstagung der GAMM mußte zunächst abgesagt werden. Da sie aber als kriegswichtig angesehen wurde, fand sie dann doch in der Zeit vom 11. bis 13. Juni 1942 in München statt. Wie notwendig die Abhaltung einer solchen Arbeitstagung war, nachdem seit der letzten Zusammenkunft in Braunschweig über zwei Jahre verflossen sind, zeigte einmal die große Zahl der angemeldeten Vorträge, die es nötig machte, zweieinhalb Tage statt wie ursprünglich beabsichtigt zwei Tage für die Tagung anzusetzen. Obwohl eine Reihe von Herren, die Vorträge angekündigt hatten, im letzten Augenblick am Erscheinen verhindert waren, war diese Zeit noch reichlich ausgefüllt. Weiter ging das hervor sowohl aus der großen Zahl der Teilnehmer — der von der Technischen Hochschule München zur Verfügung gestellte Hörsaal mit 180 Sitzplätzen war bei vielen Vorträgen fast gefüllt — wie aus den an die meisten Vorträge anschließenden lebhaften Aussprachen, aus denen das große Interesse an den behandelten Problemen hervorging. Nicht zu vergessen ist, daß einer der Hauptwerte einer solchen Tagung in der persönlichen Aussprache der Teilnehmer und in den wissenschaftlichen Erörterungen im kleineren Kreise liegt.

Leider war Professor Prandtl, der sonst regelmäßig die Tagungen der GAMM leitete, an der Teilnahme durch anderweitige starke Inanspruchnahme verhindert. An seiner Stelle eröffnete Professor Grammel die Tagung und dankte vor allem dem Geschäftsführer, Professor Weber, für die dieses Mal besonders viel Arbeit erfordernde Vorbereitung der Tagung.

Die Vortragsfolge war die folgende:

Donnerstag, den 11. Juni, vormittags:

Marguerre, DVL: Stabilität der Zylinderschale veränderlicher Krümmung.

Flügge, DVL: Ausbreitung von Biegungswellen in Stäben.

Weber, Dresden: Eingrenzung der Verschiebungen belasteter Membranen.

Bilharz, Braunschweig: Über eine gesteuerte eindimensionale Bewegung.

Donnerstag, den 11. Juni, nachmittags:

Fromm, Danzig: Kräfte und Molekülzertrümmerung in der Schwingmühle.

Hartung, Danzig: Messungen des Schubmoduls zäher Flüssigkeiten.

Pfriem, DVL: Technische Beispiele für vorteilhafte Verwendung von Massenpunktkoordinaten.

Mönch, München: Spannungsoptische Vorführungen.

Freitag, den 12. Juni, vormittags:

Collatz, Karlsruhe: Fehlerabschätzung beim Iterationsverfahren zur Auflösung linearer Gleichungssysteme.

Quade, Karlsruhe: Neuere Ergebnisse über trigonometrische Interpolation.

v. Guérard, Darmstadt: Über Existenz und Berechnung größter Biegeschwingungszahlen.

Löbell, München: Über ein Verzerrungsmaß für Flächenabbildungen.

Neuber, Braunschweig: Ein Verfahren zur numerischen Integration von Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Richter, Aussig: Einfluß des Kammerquerschnittes auf die Spiegelbewegung in einem Wasserschloß.

Freitag, den 12. Juni, nachmittags:

Schultz-Grunow, Aachen: Nichtstationäre eindimensionale Gasbewegungen.

Sauer, Aachen: Charakteristikenverfahren für die eindimensionale instationäre Gasströmung.

Oswatitsch und Rothstein, Göttingen: Das Strömungsfeld in Lavaldüsen.

Schubert, Peenemünde: Zur Theorie des stationären Verdichtungsstoßes.

Schmieden, DVL: Kompressible Strömungen um ein Rotationsellipsoid (Rayleigh-Strömungen).

Sonnabend, den 13. Juni, vormittags:

Lyra, Göttingen: Zur Theorie des Moazagotl-Aufwindes.

Schmidt u. Schröder, DVL: Die Prandtlsche Grenzschichtgleichung als asymptotische Näherung der Navier-Stokesschen Differentialgleichung bei unbegrenzt wachsender Reynoldsscher Zahl.

Weissinger, DVL: Eine Verschärfung der Traglinientheorie.

Ginzel, Göttingen: Die Auftriebsverteilung eines tiefen verwundenen Rechtecksflügels.

Schubert, DVL: Über eine Integrodifferentialgleichung der Luftschraubentheorie.

Die Vorträge der Herren Flügge, Bilharz, Collatz, Neuber und Schubert sowie der von Frl. Ginzel werden voraussichtlich in den nächsten Heften dieser Zeitschrift erscheinen. Der Vortrag von Herrn Weber beschäftigte sich mit den Fragen, denen sein auf den Seiten 126—130 dieses Heftes gebrachter Aufsatz gewidmet ist.

Dresden. Willers. 386

**Persönliches.**

Dr.-Ing. F. Seewald wurde zum o. Prof. für angewandte Mathematik und Strömungslehre an der Technischen Hochschule Aachen ernannt.

**Berichtigungen.**

W. Frössel, **Berechnung der Reibung und Tragkraft eines endlich breiten Gleitschuhes auf ebener Gleitbahn.** Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941) S. 321 bis 340.

In der Kontinuitätsgl. (2) muß es natürlich heißen

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Göttingen. W. Frössel. 374

K. Wieghardt, **Zur Theorie der Wirbelbewegung.** Z. angew. Math. Mech. Bd. 22 (1942), S. 58 bis 60.

Die Gleichungen (6), die aus (5) folgen, sind versehentlich falsch geschrieben; sie lauten richtig:

$$\left.\begin{aligned}\dot z&=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(s)}\frac{\gamma(\eta,\zeta)\,(\eta-y)}{(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}\,d s\\ \dot y&=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(s)}\frac{\gamma(\eta,\zeta)\,(\zeta-z)}{(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}\,d s\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (6).$$

Aus diesen gehen die speziellen Formeln (7) hervor.

Göttingen. K. Wieghardt. 382

Für den Textteil verantwortlich: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. —

— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.

lech.
1942

uer-
nem

näre

für
ng.
Das

tio-

gen
en).

otl-

dtl-
che
ial-
lds-

der

ung

ial-

Col-
Frl.
sten
rag
gen,
ftes

386

für
an

und
auf
21

ßen

374

ng.
60.
ind
tig:

(6).

or.
382

. —
ärz.